

Die Homotopie von Spinbordismenkategorien und Abbildungsklassengruppen

Diplomarbeit

von

TILMAN BAUER
MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT BONN
BERINGSTR. 1, 53115 BONN, DEUTSCHLAND

September 1998.

Vorwort

In dieser Diplomarbeit beschäftige ich mich mit Abbildungsklassengruppen in verschiedenen Varianten. Besondere Bedeutung liegt dabei auf Spin–Abbildungsklassengruppen, also Gruppen derjenigen Diffeomorphismen einer riemannschen Fläche (modulo Isotopie), die eine vorgegebene Spinstruktur auf dieser Fläche respektieren. Dabei betrachte ich zwei verschiedene mögliche Definitionen von Spin–Abbildungsklassengruppen: es ergibt sich, dass eine (nach Masbaum [Mas97]) eine Erweiterung der anderen durch die Gruppe mit zwei Elementen ist.

Den Anstoß gibt dabei Tillmanns Arbeit [Til97b], in der sie zeigt, dass der klassifizierende Raum einer (geeignet stabilisierten) Abbildungsklassengruppe ein unendlicher Schleifenraum wird, wenn man die Quillensche Plus-Konstruktion darauf anwendet. Ähnliche Resultate leite ich in dieser Arbeit für Spin–Abbildungsklassengruppen ab (Satz 4.2.5). Um dieses Resultat zu beweisen, werden gewisse Bordismen-2-Kategorien konstruiert, die auch für sich interessante mathematische Objekte sind. Die klassifizierenden Räume der Abbildungsklassengruppen werden nämlich mit dem Nerv dieser Kategorie in Verbindung gebracht; aus der Tatsache, dass die Bordismenkategorie eine symmetrisch-monoidale 2-Kategorie ist, folgt damit, dass der Nerv ein unendlicher Schleifenraum ist. Daher lassen sich unendliche Schleifenabbildungen in und aus den klassifizierenden Räumen der Abbildungsklassengruppen konstruieren, indem man nach symmetrisch-monoidalen Funktoren in und aus der Kategorie sucht, was aber nicht Gegenstand dieser Arbeit ist.

Die wichtigsten Resultate, die hier verwendet werden, sind die Stabilisierungssätze von Harer [Har85, Har90], die unendliche Schleifenraumstruktur von Nerven symmetrisch-monoidal Kategorien ([May72]) sowie natürlich Tillmanns Arbeit [Til97b].

In Kapitel 1 werden zunächst die wichtigsten Definitionen und Eigenschaften vorgestellt. Dann werden Kurvensysteme auf Flächen und deren Stabilisatoren mit Zerlegungen von Flächen und den Gruppen der einzelnen Komponenten in Verbindung gebracht, was wichtig ist, um Harers Resultate aus [Har90] in den Kontext dieser Arbeit zu rücken. Dieser Zusammenhang scheint in einigen Arbeiten implizit verwendet zu werden, doch gibt es nach meinem Wissen bisher keine veröffentlichte Arbeit, die dies sauber behandelt.

Kapitel 2 behandelt Spinstrukturen auf Flächen, deren Klassifikation und algebraische Beschreibung. Dann werden die Spin–Abbildungsklassengruppen

in beiden Varianten eingeführt. Dieses Kapitel enthält keine neuen Ergebnisse, lediglich die in Masbaum [Mas97] recht knapp behandelten Grundeigenschaften der Spin–Abbildungsklassengruppen werden etwas ausführlicher behandelt.

In Kapitel 3 wird dann die Homologiestabilisierung der Abbildungsklassengruppen unter Verklebung von Spinflächen bewiesen. Das Resultat für die masbaumschen Gruppen wird aus dem für die herkömmlichen abgeleitet. Die Resultate aus dem zweiten Teil sind dabei weitgehend neu.

In Kapitel 4 wird dann das Hauptresultat bewiesen, nämlich dass die Spin–Abbildungsklassengruppen, geeignet stabilisiert, die Homologie eines unendlichen Schleifenraums haben. Dazu werden die benötigten Bordismenkategorien eingeführt und schließlich deren Homotopie mit der der Gruppen verbunden. Zu diesem Kapitel gibt es drei Anhänge: in Anhang A fasse ich die Definitionen von höheren Kategorien und monoidalen Strukturen zusammen; dabei handelt es sich nur um völlig strikt definierte Kategorien, also nicht um eine der in letzter Zeit entwickelten Definitionen von „schwachen n -Kategorien“. In Anhang B wird der Nerv einer n -Kategorie und die geometrische Realisierung eines solchen definiert. Schließlich fasst Anhang C die benötigten Ergebnisse aus der Theorie der Operaden zusammen.

Diese Arbeit ist eine Weiterführung der Arbeit [Bau97], die ich 1996 in Oxford als MSc-Arbeit begonnen habe. Die Erweiterung besteht aus der Ausweitung der Ergebnisse auf die masbaumschen Gruppen (Kapitel 2 und 3 und Teile von 4) sowie einer Überarbeitung der bestehenden Abschnitte. Dank gebührt vor allem meinen Betreuern Carl–Friedrich Bödigheimer und Ulrike Tillmann, die mir stets mit Rat und Hilfe zur Seite standen, außerdem dem deutschen akademischen Austauschdienst, der mir den Aufenthalt in Oxford ermöglicht hat, und der Studienstiftung des deutschen Volkes, die mir ein Stipendium in Deutschland gewährte.

Diese Arbeit wurde mit dem Schriftsatzprogramm TeX auf einem Apple Macintosh erstellt; die Grafiken wurden mit dem Programm ShareDraw bearbeitet. Die verwendete Schrift ist eine 11-Punkt Palatino sowie, für die Formeln, die zum „concrete“-Stil gehörige Euler-Schrift.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	2
Einleitung	7
Notation	11
Kapitel 1. Flächen und Abbildungsklassengruppen	13
1.1. Der Flächenkalkül	13
1.2. Punktierter AKG und Kurven im Tangentialbündel	25
Kapitel 2. Spinstrukturen auf Flächen und Spin-AKG	31
2.1. Spinstrukturen	31
2.2. Spin-Abbildungsklassengruppen	35
2.3. Spin-Abbildungsklassengruppen nach Masbaum	36
Kapitel 3. Die Homologie der Spin-Abbildungsklassengruppen	39
3.1. Die Homologie der Gruppen Γ_Q	39
3.2. Die Homologie der Gruppen $\tilde{\Gamma}_\sigma$	41
Kapitel 4. Die unendliche Schleifenraumstruktur der Spin-AKG	45
4.1. Bordismenkategorien	45
4.2. Die Homotopie von \mathcal{S} und den Spin-Abbildungsklassengruppen	48
Anhang A. n -Kategorien und monoidale Strukturen	61
A.1. n -Kategorien	61
A.2. Zwei Konzepte werden kombiniert: monoidale Kategorien	65
Anhang B. Nerven von Kategorien	69
B.1. Nerven	69
B.2. Geometrische Realisierung	71
Anhang C. Operaden und unendliche Schleifenräume	73
Literaturverzeichnis	79

Einleitung

Eine Abbildungsklasse ist eine Isotopieklassse von Automorphismen einer kompakten, zusammenhängenden, orientierbaren riemannschen Fläche. Die Abbildungsklassen bilden eine Gruppe, die von dem Geschlecht der Fläche abhängt sowie im Falle einer nicht geschlossenen Fläche von der Anzahl der Randkomponenten. Hierbei fordert man von einem Automorphismus üblicherweise, dass er die Randkomponenten punktweise festhält. Die Abbildungsklassengruppe hängt jedoch nicht ab von der differenzierbaren oder komplexen Struktur; daher sind die konkurrierenden Definitionen von Abbildungsklassengruppen von differenzierbaren oder topologischen orientierbaren Flächen äquivalent.

Zudem ist es, zumindest für geschlossene Flächen, auch möglich, diese topologischen Symmetriegruppen von Flächen in rein kombinatorischer Weise zu beschreiben, ohne überhaupt Flächen zu erwähnen: sie sind nämlich isomorph zur äußeren Automorphismengruppe einer freien Gruppe (also der Gruppe aller Automorphismen modulo den inneren Automorphismen). Man kennt auch eine endliche, übersichtliche Menge von Erzeugern dieser Gruppe; die Relationen sind zwar auch endlich erzeugt (die Abbildungsklassengruppen sind endlich präsentiert), jedoch schon deutlich komplizierter. Daher erscheint die rein gruppentheoretische Herangehensweise wenig vielversprechend.

Dagegen können viele interessante Eigenschaften der Abbildungsklassengruppen aus der Operation auf dem Teichmüller-Raum der riemannschen Flächen, oder einer Kompaktifizierung, abgeleitet werden. Der Quotient dieser Operation ist der Modulraum der riemannschen Flächen. Diese Operation ist eigentlich-diskontinuierlich (endliche Stabilisatoren) und der Teichmüller-Raum ist zusammenziehbar, daher stimmen die Homologiegruppen der Abbildungsklassengruppen rational mit denen des Modulraums überein. Aus der Operation leitet man z.B. ab, dass die Abbildungsklassengruppe eine Untergruppe von endlichem Index besitzt, die sich in der Homologie wie eine kompakte Mannigfaltigkeit verhält, in Einklang mit der Tatsache, dass der Modulraum eine Orbifaltung ist. Also sind Abbildungsklassengruppen virtuell von endlicher kohomologischer Dimension, virtuelle Dualitätsgruppen usw.

Es fällt auf, dass die Abbildungsklassengruppen diese und viele andere Eigenschaften mit arithmetischen Gruppen teilen, jedoch keine sind (außer im Geschlecht 1, wo die Abbildungsklassengruppe eines Torus $SL_2(\mathbf{Z})$ ist). Unter Benutzung ähnlicher Techniken wie bei arithmetischen Gruppen zeigte Harer das womöglich wichtigste Resultat in Bezug auf die Homologie der Gruppen, nämlich dass die Homologie stabil wird, wenn man das Geschlecht erhöht. Dies war schon vorher für Gruppen wie $Sp_{2n}(\mathbf{R})$, $O_n(\mathbf{R})$ für gewisse Ringe \mathbf{R} von Vogtmann, Wagoner und anderen gezeigt worden, indem sie simpliziale Komplexe aus Unterräumen von \mathbf{R}^n betrachteten, auf denen die Gruppen operieren. Solche Systeme von Unterräumen bilden eine partiell geordnete Menge durch Inklusion, und zu einer partiell geordneten Menge assoziiert man einen simplizialen Komplex X , dessen n -Simplizes Ketten $V_0 < V_1 < \dots < V_n$ sind; die Randabbildungen sind die offensichtlichen, durch Auslassung von Elementen entstehenden. Die Gruppe operiert dann auf X und liefert daher eine Spektralsequenz, die als E^1 -Term den Kettenkomplex von X tensoriert mit einer Auflösung von \mathbf{Z} über dem Gruppenring hat. Da es sich herausstellt, dass X homologieäquivalent zu einem Bouquet von hochdimensionalen Sphären ist, konvergiert die Spektralsequenz daher in kleinen Dimensionen gegen Null, und man liest die Homologiestabilisierung in der Nähe der Koordinatenachse ab.

Für Abbildungsklassengruppen gibt es eine reiche kombinatorische Theorie von simplizialen Komplexen aus eingebetteten Kurven, die die Systeme von Unterräumen ersetzen. Diese sind auch hochzusammenhängend, wie Harer mit der Theorie der „train tracks“ zeigt. Auf diese Weise kann man zeigen, dass die i -te Homologie der Abbildungsklassengruppe unabhängig von der Fläche ist, solange das Geschlecht größer als $3i + \text{const}$ ist (dies wurde von Ivanov verbessert zu $2i + \text{const}$, was wohl optimal ist). Insbesondere sind sie auch unabhängig von der Anzahl der Randkomponenten. Falls man jedoch auch Punktierungen der Fläche betrachten möchte, muss man aufpassen: davon sind die Abbildungsklassengruppen nämlich nicht unabhängig!

In [Til97b] ist es Tillmann gelungen, die Theorie der unendlichen Schleifenräume und symmetrisch-monoidalen Kategorien auf Abbildungsklassengruppen anzuwenden. Sie zeigt, dass ihre Homologie, wenn man sie bezüglich des Geschlechts durch iteriertes Ankleben eines Torus stabilisiert, die eines unendlichen Schleifenraums ist. Um dies zu zeigen, konstruiert sie eine 2-Kategorie, die als Objekte geschlossene 1-Mannigfaltigkeiten, als Morphismen Bordismen dazwischen (d.h. Flächen) und als 2-Morphismen Isomorphismen von Flächen hat, und weist darauf eine symmetrisch-monoidale Struktur nach. Dadurch folgt aus der Theorie der unendlichen Schleifenräume, dass der Nerv dieser Kategorie ein unendlicher Schleifenraum ist, und

Tillmann zeigt durch eine Anwendung eines Gruppenvervollständigungssatzes, dass die erste Entschleifung homologieäquivalent zu der stabilisierten Abbildungsklassengruppe ist.

In den folgenden Kapiteln möchte ich nun zweierlei versuchen: einerseits detallierter erklären, wie die tillmannschen Methoden funktionieren, andererseits, sie auf zwei verschiedene Arten von Spin–Abbildungsklassengruppen anwenden. Ich fasse auch in den Anhängen zusammen, wie man strikte höhere Kategorien definiert und den Schritt von diesen Kategorien zur Topologie schafft, nämlich in die simpliziale Welt. Die Spin–Abbildungsklassengruppen sind Untergruppen endlichen Indexes in den Abbildungsklassengruppen und spielen eine wichtige Rolle in der modernen Physik, nämlich der String-Theorie. Darauf wird aber in dieser Arbeit nicht eingegangen. Eine Spinstruktur auf einer Kurve über \mathbb{C} kann man auffassen als eine Quadratwurzel aus dem kanonischen Linienbündel; eine Spin–Abbildungsklasse ist dann die Klasse eines Automorphismus, der dieses Linienbündel erhält. Eine kombinatorischere Beschreibung ist jedoch für meine Belange nützlicher: eine Spinstruktur kann man auch ansehen als eine quadratische Form auf der ersten Homologiegruppe der Fläche (über \mathbb{F}_2). Harer hat auch gezeigt, dass sich die Homologie der Spin–Abbildungsklassengruppen genauso wie die der Abbildungsklassengruppen stabilisiert, mit einem etwas schlechteren Stabilisierungsbereich (Faktor 4). Unglücklicherweise beweist er dies explizit nur für Flächen mit einer Randkomponente, was für die Übertragung von Tillmanns Ergebnissen auf Spin–Abbildungsklassengruppen nicht genügt. Jedoch lässt sich das Ergebnis mit einer recht elementaren Betrachtung des Verhaltens der Gruppen unter Inklusionen von Flächen aus Harers ableiten. Ich betrachte auch eine zweite Art von Abbildungsklassengruppen, die eine zentrale $\mathbb{Z}/2$ -Erweiterung der obigen sind; diese wurden von Masbaum definiert. Sie entstehen aus der $2 + 1$ -Bordismenkategorie, wo die Objekt geschlossene Flächen sind und die Morphismen 3-Mannigfaltigkeiten. Die Abbildungsklassengruppen lassen sich in gewisser Weise in diese Kategorie einbetten, indem man einer Abbildungsklasse ihren Abbildungszyylinder zuordnet, der dann ein Endomorphismus der Fläche in der Bordismenkategorie ist. Beim Übergang zu Spinflächen wird man nun aber auch auf den 3-Mannigfaltigkeiten (den Abbildungszylinern) eine Spinstruktur fordern wollen; es zeigt sich, dass es zu jeder Spin–Abbildungsklasse genau zwei mögliche Fortsetzungen der Spinstruktur der Fläche auf den Abbildungszylinern gibt. Hieraus ergibt sich die angesprochene $\mathbb{Z}/2$ -Erweiterung.

Hier hat man es also mit Abbildungsklassengruppen zu tun, die nur für geschlossene Flächen definiert sind, und daher ist es nicht a priori klar, was man unter Stabilisierung verstehen soll (man kann ja nichts ankleben). Eine

eventuell existierende Stabilisierungsabbildung kann jedenfalls so nicht induziert werden. Daher studiere ich das Verhältnis zwischen den masbaumschen und den herkömmlichen Spin–Abbildungsklassengruppen, um über diesen Umweg und die Stabilisierung der letzteren eine Stabilisierungsabbildung für die masbaumschen Gruppen zu erhalten. Die Stabilisierung erhalte ich dann in einem deutlich schlechteren Bereich (das Geschlecht muss größer als das Quadrat des Homologiegrades sein), was aber für die Anwendung völlig gleichgültig ist.

Notation

Symbol	Bedeutung	Seite
$(F - X)$	Kompaktifizierung von $F - X$	6
C, D, S	kleine Kategorien	50
K	Kern der kanonischen Abbildung $\Gamma^1 \rightarrow \Gamma$	16
K_σ	Bild in K des Kerns einer Spinstruktur σ unter Ψ	24
M_0	Schritt 1 in der Konstruktion von S	32
M_1	Schritt 2 in der Konstruktion von S	32
M_2	Schritt 3 in der Konstruktion von S	33
M_3	Schritt 4 in der Konstruktion von S	33
P_d	d -dimensionales Standardsimplex, $d \in N_0$	52
P_d^n	d -dimensionales Standardprisma, $d \in N_0^n$	52
$\mathcal{B}G$	die Gruppe G , aufgefasst als Kategorie mit einem Objekt	47
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{S}$	große Kategorien	50
$\underline{\text{Cat}}$	Kategorie aller kleinen Kategorien	50
$\text{col } \Sigma$	Kragen um den Rand von Σ .	6
$\text{const}(X)$	konstante simpliziale Menge X	50
Δ	Skelett der Kategorie der geordneten endlichen Mengen und monotonen Abbildungen	50
$\Delta\mathcal{D}$	Kategorie der simplizialen Objekte in \mathcal{D}	50
$\Delta^n\mathcal{D}$	Kategorie der n -simplizialen Objekte in \mathcal{D}	50
$\text{Diff}^+(-)$	Diffeomorphismengruppe der Fläche Σ	6
$\text{Diff}^+(\Sigma; X)$	Gruppe der Diffeomorphismen von Σ , die die Identität auf X sind	6
$\text{Diff}^1(\Sigma)$	Untergruppe der Diffeomorphismen von Σ , die einen festen Punkt festhalten	16
$\text{Diff}_0^+(\Sigma; X)$	Zusammenhangskomponente der Identität in $\text{Diff}^+(\Sigma; X)$	6
$\text{diag}(X)$	diagonale simpliziale Menge zu X	50
$\underline{\text{Ens}}$	Kategorie aller Mengen	50
$\mathcal{E}G$	Translationskategorie der Gruppe G	47
$\mathcal{E}\rho$	Translationskategorie der Kategorienoperation ρ	36
$\Gamma(\Sigma)$	Abbildungsklassengruppe der Fläche Σ	6
$\Gamma(\Sigma; X)$	Gruppe der Abbildungsklassen, die X festhalten	6
$\Gamma^1(\Sigma)$	punktierte Abbildungsklassengruppe von Σ	16
Γ_σ^1	punktierte Abbildungsklassen, die die Spinstruktur erhalten	25
$\Gamma_Q(\Sigma)$	Spin-Abbildungsklassengruppe bezüglich der Spinstruktur Q	23

Symbol	Bedeutung	Seite
$\Gamma_\sigma(\Sigma)$	Spin-Abbildungsklassengruppe bezüglich der Spinstruktur σ	23
$\Gamma_{g,n}$	Abbildungsklassengruppe von $\Sigma_{g,n}$	7
$\Gamma_{g,n}^{(i)}$	Spin-Abbildungsklassengruppe für $\Sigma_{g,n}$ mit einer Spinstruktur der Arf-Invariante $i \in \{0, 1\}$	23
$Q: H_1(\Sigma; \mathbf{Z}_2) \rightarrow \mathbf{Z}_2$	Spinstruktur als quadratische Form auf der Homologie	22
$\Psi: \pi_1(ST\Sigma) \rightarrow K$	Randabbildung in der exakten Homotopiesequenz der Faserung $\Gamma(\Sigma) \rightarrow ST\Sigma$	18
$\sigma: \pi_1(ST\Sigma; \mathbf{Z}_2) \rightarrow \mathbf{Z}_2$	Spinstruktur als Homomorphismus	21
\mathcal{NC}	Nerv einer kleinen Kategorie C	51
$\overset{\circ}{\Sigma}$	$\Sigma - \partial\Sigma$	8
$\Sigma_1 \cup_\alpha \Sigma_2$	Verklebung zweier Flächen Σ_1, Σ_2 entlang von Randkomponenten, die mit α identifiziert werden.	10
Σ	topologische oder glatte Fläche	6
$\Sigma_{g,n}$	Fläche vom Geschlecht g mit n Randkomponenten	6
<u>σ-Bord</u>	2-Kategorie aller Spinbordismen mit Isomorphismen als 2-Morphismen	31
\mathcal{S}	kleine Kategorie von Spinflächenmodellen	33
$ST\Sigma$	Einheitstangentenbündel von Σ	16
<u>Top</u>	Kategorie der kompakt erzeugten Hausdorff-Räume	50
T_{W_c}	Dehn-Twist um die Kurve c	7
$\tilde{\Gamma}_\sigma$	Spin-Abbildungsklassengruppe nach Masbaum	25
$ X $	geometrische Realisierung eines n -simplizialen Objekts (Menge, Raum) X	52

KAPITEL 1

Flächen und Abbildungsklassengruppen

1.1. Der Flächenkalkül

In diesem Kapitel werden die Abbildungsklassengruppen von Flächen Σ definiert und ihre funktoriellen Eigenschaften bezüglich einer passenden Flächenkategorie studiert. Die Inklusionen von Unterflächen induzieren Inklusionen der Abbildungsklassengruppen, und die dadurch entstehenden Untergruppen lassen sich als Stabilisatoren von gewissen Systemen von Kurven in der Fläche ansehen.

Durchgehend sei Σ eine glatte, kompakte, zweidimensionale und orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Nach dem Kragensatz (z.B. [Hir76]) gibt es einen Diffeomorphismus von $\partial\Sigma \times I$ in eine Umgebung von $\partial\Sigma$ in Σ , einen „Kragen“ $\text{col } \Sigma$, mit $\text{col } \Sigma(x, 0) = x$ (diese Notation verwende ich auch für das Bild von $\text{col } \Sigma$). Im Folgenden werde ich immer schlicht den Begriff „Fläche“ gebrauchen und meine damit eine Fläche wie oben zusammen mit einem Kragen. Da später aus solchen Flächen eine Bordismenkategorie konstruiert wird, für die es wesentlich ist, dass diese Flächen auch nicht-zusammenhängend sein können, sind von vornherein unzusammenhängende Flächen erlaubt. $\Sigma_{g,n}$ ist eine zusammenhängende Fläche mit n Randkomponenten vom Geschlecht g . g und n bestimmen eine solche Fläche bis auf Diffeomorphie.

DEFINITION. Ist $X \subseteq \Sigma$ eine beliebige Teilmenge, so definiert

$$\text{Diff}^+(\Sigma; X) := \left\{ f: \Sigma \xrightarrow{\cong} \Sigma \mid f \text{ ist orientationserhaltend und } f|_X = \text{id} \right\}.$$

eine Gruppe. In dieser Gruppe liegt als Normalteiler die Zusammenhangskomponente der Identität,

$$\text{Diff}_0^+(\Sigma; X) = \left\{ f \in \text{Diff}^+(\Sigma; X) \mid f \text{ ist isotop zu } \text{id}_\Sigma \right\}$$

Dabei steht Isotopie hier für eine Homotopie, die zu jedem Zeitpunkt ein Diffeomorphismus ist.

Die **Abbildungsklassengruppe** von Σ ist die Gruppe der Zusammenhangskomponenten

$$\Gamma(\Sigma; X) := \pi_0 \text{Diff}^+(\Sigma; X \cup \partial\Sigma) = \frac{\text{Diff}^+(\Sigma; X \cup \partial\Sigma)}{\text{Diff}_0^+(\Sigma; X \cup \partial\Sigma)}$$

und natürlich stehen $\Gamma(\Sigma)$ für $\Gamma(\Sigma, \emptyset)$ und $\text{Diff}^+(\Sigma)$ für $\text{Diff}^+(\Sigma, \emptyset)$.

BEMERKUNG 1.1.1. Falls $X \subseteq \Sigma$ ein Umgebungsretrakt einer offenen Umgebung V von X ist, so setze $(F - X)^\circ := F - V$. Ist dies wieder eine Fläche, so gilt $\Gamma((F - X)^\circ) \cong \Gamma(F; X)$.

BEMERKUNG 1.1.2. In der Dimension 2 ist man in der glücklichen Lage, dass die Kategorien der differenzierbaren Flächen, der topologischen Flächen mit Abbildungen sowie der topologischen Flächen mit Homotopieklassen von Abbildungen äquivalent sind. Ebenso ist die obige Wahl der differenzierbaren Flächen für die weiteren Betrachtungen nicht wesentlich; ebensogut könnte man mit topologischen Flächen und Homöomorphismen oder, im Fall von geschlossenen Flächen, sogar Selbsthomotopieäquivalenzen arbeiten (siehe dazu [Mis94] sowie die dort aufgeführten Referenzen).

Die Abbildungsklassengruppen werden erzeugt von den sogenannten *Dehn-Twists* [Deh38, Lic64, HT80]. Ist $c: S^1 \rightarrow \Sigma$ eine eingebettete glatte selbstschnittfreie Kurve, so definiert man den Dehn-Twist Tw_c um c wie folgt: Es sei $U \subseteq \Sigma$ eine abgeschlossene Umgebung von c , so dass es einen orientierten Diffeomorphismus ϕ von U auf den Zylinder $[-1, 1] \times S^1$ gibt, wobei $c = \phi(0, -)$. U sei dabei so orientiert, dass $\langle \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = 1$ für Koordinaten (t, θ) . $\alpha: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ sei differenzierbar mit $\alpha(x) = 0$ für $x < -1$ und $\alpha(x) = 1$ für $x > 1$. Dann definiert

$$\text{Tw}_c(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \notin U; \\ \phi^{-1}(t, \theta \exp(2\pi\alpha(t))), & \text{falls } x \in U \text{ und } \phi(x) = (t, \theta) \end{cases}$$

einen Diffeomorphismus, der unabhängig von der Wahl der Umgebung U , der Abbildung α , der Orientierung und sogar der Isotopiekasse von c , aber abhängig von der Orientierung von Σ ist.

In der Tat konnten Hatcher und Thurston [HT80] zeigen, dass für eine geschlossene Fläche vom Geschlecht g $2g + 1$ Dehn-Twists die gesamte Abbildungsklassengruppe erzeugen; McCool [McC75] bewies, dass $\Gamma_g = \Gamma(\Sigma_{g,0})$ sogar endlich präsentiert ist, doch es war erst Wajnryb [Waj83], der tatsächlich eine relativ übersichtliche Menge von Relationen angab. Dennoch sind die heute bekannten Präsentierungen von Γ_g zu kompliziert, um konkrete gruppentheoretische Berechnungen durchzuführen.

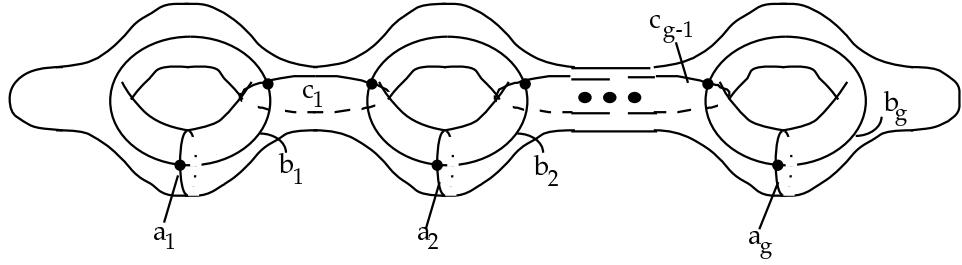


ABBILDUNG 1. Die standard-symplektische Basis (a_i, b_i) für $H_1(\Sigma; \partial\Sigma; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{2g}$ und die Abbildungsklassengruppenerzeuger Tw_{a_i} , Tw_{b_i} , Tw_{c_i}

Für eine zusammenhängende Fläche Σ ist $H_1(\Sigma, \partial\Sigma; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{2g}$ ein symplektischer freier \mathbf{Z} -Modul; die Schnittform auf H_1 liefert das innere Produkt. Eine symplektische Basis, bestehend aus einfach geschlossenen Kreisen wie in Abbildung 1.1, sei mit (a_i, b_i) bezeichnet. Da jeder Diffeomorphismus $f \in \text{Diff}^+(\Sigma; \partial\Sigma)$ die Schnittform festhält, erhalten wir einen Homomorphismus $m: \Gamma(\Sigma) \rightarrow \text{Sp}(2g, \mathbf{Z})$.

LEMMA 1.1.3. *Der Homomorphismus $m: \Gamma(\Sigma) \rightarrow \text{Sp}(2g, \mathbf{Z})$ ist surjektiv. Ist (a_i, b_i) eine symplektische Basis wie in Abbildung 1.1, so werden die Dehn-Twists Tw_{a_i} und Tw_{b_i} auf die folgenden Matrizen (bezüglich der Basis $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$) abgebildet:*

$$\mathfrak{m}(\text{Tw}_{a_i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{m}(\text{Tw}_{b_i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{m}(\text{Tw}_{c_i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & -1 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis: Die oben angegebenen Matrizen erzeugen die symplektische Gruppe $\text{Sp}(2g, \mathbf{Z})$ [Bir71, Kli61]. \square

DEFINITION. Ein Abbildung $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ zwischen zwei Flächen nenne ich **schwache Einbettung**, falls ihre Einschränkung auf das Innere,

$$f|_{\overset{\circ}{\Sigma}_1}: \overset{\circ}{\Sigma}_1 \rightarrow \overset{\circ}{\Sigma}_2,$$

eine Einbettung ist. Es wird nichts über die Art gefordert, wie der Rand abgebildet wird.

LEMMA 1.1.4. (i) Eine schwache Einbettung $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ induziert eine Abbildung $f_*: \Gamma(\Sigma_1) \rightarrow \Gamma(\Sigma_2)$, wodurch Γ zu einem Funktor von der Kategorie der Flächen und der schwachen Einbettungen in die Kategorie der Gruppen wird.

(ii) Sind $f_i: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ ($i = 0, 1$) isotope schwache Einbettungen, so ist $f_{1*} = f_{2*}$.

Beweis: (i) Zu gegebenem $\phi \in \text{Diff}^+(\Sigma_1; \partial\Sigma_1)$ definiere

$$(f_*\phi)(x) := \begin{cases} x; & x \notin \text{im}(f)^\circ \\ f(\phi(f^{-1}(x))); & x \in \text{im}(f)^\circ \end{cases}$$

$f_*\phi|_{\text{im}(f)^\circ}$ und $f_*\phi|_{(\Sigma_2 - \text{im}(f))^\circ}$ sind injektiv und können fortgesetzt werden zu einer übereinstimmenden Abbildung auf dem gemeinsamen Rand $\partial\text{im}(f)$, so dass $f_*\phi$ wieder ein Diffeomorphismus ist.

f_* ist wohldefiniert auf $\Gamma(\Sigma_1)$, das heißt unabhängig von der Isotopieklassen von ϕ : denn ist $H: I \times \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ eine Isotopie, so ist f_*H_t eine Isotopie zwischen f_*H_0 und f_*H_1 .

(ii) Sei $f: I \times \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ eine Isotopie zwischen den schwachen Einbettungen, d.h. f_t ist für jedes t eine schwache Einbettung. Sei wieder $\phi \in \text{Diff}^+(\Sigma_1; \partial\Sigma_1)$ gegeben. Dann ist $t \mapsto f_{t*}\phi$ wieder stetig und definiert somit einen Weg in $\text{Diff}^+(\Sigma_2; \partial\Sigma_2)$ von $f_{0*}\phi$ nach $f_{1*}\phi$. \square

Wichtig sind im Folgenden Untergruppen von $\Gamma(\Sigma)$, die als Stabilisatoren gewisser Teilmengen von Σ , besonders von Graphen, auftreten.

DEFINITION. Sei $X \subseteq \Sigma$ eine beliebige Teilmenge einer Fläche Σ . Der **Stabilisator von X in $\Gamma(\Sigma)$** ist definiert als die Menge derjenigen Komponenten von $\text{Diff}^+(\Sigma; \partial\Sigma)$, die $\text{Stab}_{\text{Diff}^+(\Sigma; \partial\Sigma)} X$ nicht trivial schneiden. Gruppentheoretisch ergibt sich $\text{Stab}_{\Gamma(\Sigma)} X$ als Quotient

$$\text{Stab}_{\Gamma(\Sigma)} X = \frac{\text{Diff}_0^+(\Sigma; \partial\Sigma) \cdot \text{Stab}_{\text{Diff}^+(\Sigma; \partial\Sigma)} X}{\text{Diff}_0^+(\Sigma; \partial\Sigma)}.$$

BEMERKUNG 1.1.5. Die soeben definierte Untergruppe von $\Gamma(\Sigma)$ stimmt im Allgemeinen nicht mit $\Gamma(\Sigma; X)$ überein (s. S. 13) — es ist noch nicht einmal offensichtlich, ob letzteres überhaupt eine Untergruppe von $\Gamma(\Sigma)$ ist. In $\Gamma(\Sigma; X)$ werden nämlich nur jene Homotopien herausdividiert, die X zu jedem Zeitpunkt festhalten. In jedem Fall erhält man allerdings eine Surjektion

$$(1.1.6) \quad \Gamma(\Sigma; X) = \frac{\text{Diff}^+(\Sigma; X \cup \partial\Sigma)}{\text{Diff}_0^+(\Sigma; X \cup \partial\Sigma)} \rightarrow \frac{\text{Diff}_0^+(\Sigma; \partial\Sigma) \cdot \text{Stab}_{\text{Diff}^+(\Sigma; \partial\Sigma)} X}{\text{Diff}_0^+(\Sigma; \partial\Sigma)} = \text{Stab}_{\Gamma(\Sigma)} X.$$

Das nächste Ziel ist, das Bild der Abbildungsklassengruppe einer Fläche unter einer Abbildung in eine andere Fläche zu untersuchen und womöglich als Stabilisator einer Teilmenge zu identifizieren. Die Lage ist einfach, falls es sich bei der Abbildung um eine *surjektive schwache Einbettung* handelt.

LEMMA 1.1.7. *Ist $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ eine surjektive schwache Einbettung, so ist auch die induzierte Abbildung*

$$f_*: \Gamma(\Sigma_1) \longrightarrow \text{Stab}_{\Gamma(\Sigma_2)} f(\partial\Sigma_1)$$

surjektiv.

Bemerkung: Das ist offensichtlich im Allgemeinen falsch, falls f nicht surjektiv ist; ist etwa $F \subseteq G$ diffeomorph zu einer Scheibe, so steht links die triviale Gruppe, während rechts ganz $\Gamma(G)$ steht. (Man überzeugt sich leicht, dass jeder Diffeomorphismus so deformiert werden kann, dass er ganz F festhält.)

Beweis von Lemma 1.1.7:

$\text{Diff}^+(\Sigma_2, \partial\Sigma_2 \cup f(\partial\Sigma_1)) \cong \text{Diff}^+((\Sigma_2 - f(\partial\Sigma_1)), \partial)$ nach Bemerkung 1.1.1; da aber f surjektiv ist, ist

$$\text{Diff}^+((\Sigma_2 - f(\partial\Sigma_1)), \partial) \cong \text{Diff}^+((\Sigma_2 - \partial\Sigma_2), \partial) = \text{Diff}^+(\Sigma_1, \partial\Sigma_1).$$

Das gleiche gilt natürlich für die 1-Komponenten Diff_0^+ , daher erhält man mit 1.1.6

$$\Gamma(\Sigma_1) \cong \Gamma(\Sigma_2, f(\partial\Sigma_1)) \rightarrow \text{Stab}_{\Gamma(\Sigma_2)} f(\partial\Sigma_1).$$

□

Für den allgemeineren Fall nicht surjektiver Abbildungen seien Σ_1, Σ_2 zwei Flächen. Die Ränder seien jeweils komponentenweise aufgeteilt in zwei Teilmengen $\partial_{in}\Sigma_i$ und $\partial_{out}\Sigma_i$, wobei $\partial_{in}\Sigma_i \neq \emptyset$ und $\partial_{in}\Sigma_1 \cong \partial_{in}\Sigma_2$.

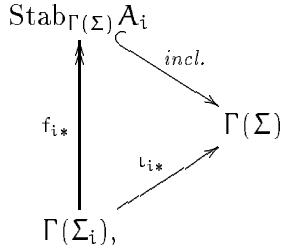
Sei $\alpha: \text{col}_{in}\Sigma_1 \rightarrow \text{col}_{in}\Sigma_2$ ein Isomorphismus zwischen den Kragen um $\partial_{in}\Sigma_1$ und $\partial_{in}\Sigma_2$. Mit $\Sigma_1 \cup_\alpha \Sigma_2$ sei die Fläche bezeichnet, die entsteht, wenn man die Σ_1 und Σ_2 mittels α aneinanderklebt.

PROPOSITION 1.1.8. *Seien Σ_1, Σ_2 zwei Flächen, $\Sigma = \Sigma_1 \cup_\alpha \Sigma_2$ für ein α . Seien*

$$\iota_i: \Sigma_i \longrightarrow \Sigma \quad (i = 1, 2)$$

die Inklusionen. Σ sei zusammenhängend, aber Σ_1 und Σ_2 brauchen es nicht beide sein.

Dann ist ι_i isotop zu einer surjektiven schwachen Einbettung $f_i: \Sigma_i \rightarrow \Sigma$, und das folgende Diagramm kommutiert:



wobei $A_i := f_i(\partial\Sigma_i) - \partial\Sigma$ ein Graph ist, der jede äußere Randkomponente von Σ_2 enthält.

Beweis: O.B.d.A. sei $i = 1$ und Σ_2 zusammenhängend, denn eine der Teilebenen muss zusammenhängen, wenn Σ es tut. Die Kragen der Flächen seien immer so gewählt, dass für $col: \partial\Sigma \times I \xrightarrow{\cong} \Sigma$ der Tangentialvektor $D|_{x,t}(\frac{\partial}{\partial t})$ für die Komponenten von $\partial_{in}\Sigma$ nach innen, sonst nach außen zeigt. Zu Σ sei $\bar{\Sigma} := \Sigma_2 \cup_{\partial\Sigma \times I} \partial\Sigma \times [-\infty, 1]$ die unberandete, nichtkompakte Fläche, die entsteht, indem man an den Kragen nach außen unendlich weiterführt. Die Fortsetzung $col: \partial\Sigma \times [-\infty, 1] \hookrightarrow \Sigma$ heiße unendlicher Kragen von Σ .

Wir konstruieren nun ein tangentiales Vektorfeld V auf Σ_2 und $\bar{\Sigma}_2$ mit folgenden Eigenschaften:

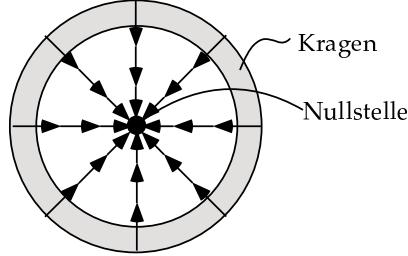
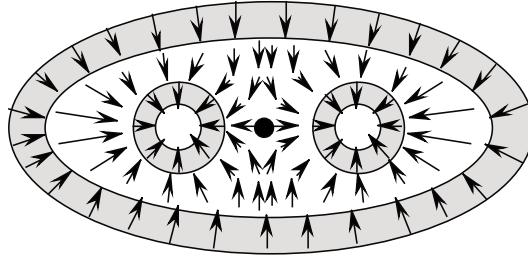
1. Auf dem (unendlichen) Kragen ist V vertikal, d.h. falls

$$p = (col \Sigma_2)(x, t), \quad \text{so gilt } V(p) = D|_{x,t} col\left(\frac{\partial}{\partial t}\right);$$

2. V erzeugt einen Fluss $\Phi: I \times \bar{\Sigma}_2 \longrightarrow \bar{\Sigma}_2$ mit der Eigenschaft

$$\Phi(1, \partial_{in}\Sigma_2) \supseteq \partial_{out}\Sigma_2.$$

Angenommen, auf zwei Flächen T_1, T_2 sind solche Vektorfelder V_1, V_2 konstruiert. Seien $in-col(T_i)$, $out-col(T_i)$ diejenigen Komponenten von $col(T_i)$, auf denen V_i nach innen resp. nach außen zeigt. Sei α eine Verklebeabbildung wie oben zwischen Teilmengen von $out-col(T_1)$ und $in-col(T_2)$. α verklebt also nur solche Kragen, bei denen das Vektorfeld auf der einen Seite nach innen, auf der anderen nach außen zeigt, aber möglicherweise nicht alle. Dann sieht man leicht, dass man eine neues Vektorfeld auf $T = T_1 \cup_\alpha T_2$ mit den gleichen Eigenschaften definieren kann, denn zunächst einmal stimmen V_1 und V_2 auf dem gemeinsamen „Gürtel“ überein. $V' = V_1 \cup V_2$ erfüllt aber noch nicht Eigenschaft 2, vielmehr gilt für den induzierten Fluss Φ' erst $\Phi'(2, in-\partial T) \supseteq out-\partial T$. Man kann sich jedoch leicht überlegen, dass man V' geeignet skalieren kann, so dass Eigenschaft 2 wieder erfüllt wird.

ABBILDUNG 2. Vektorfeld V auf einer Scheibe.ABBILDUNG 3. Vektorfeld V auf einer Hose, die an einer Randkomponente angeklebt wird

Eine globale Verdopplung des Vektorfeldes ist allerdings nicht möglich wegen Eigenschaft 1.

Eine zusammenhängende Fläche kann immer zerlegt werden in Hosen (Flächen vom Typ $\Sigma_{0,3}$) und Scheiben, und daher kann man sich also induktiv auf drei Fälle beschränken: Σ_2 ist eine Scheibe oder eine Hose, die an einer oder an zwei Randkomponenten angeklebt wird. Dort muss das Vektorfeld V definiert werden. Haben wir schließlich V auf Σ_2 , so modifizieren wir es so, dass es auf den Kragen zum Rand hin abklingt. Der induzierte Fluss ist dann schon auf Σ definiert und liefert eine Isotopie zwischen $\Phi_0 = \text{incl}_{\Sigma_1 \hookrightarrow \Sigma}$ und $\Phi_1: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma$ (vgl. dazu [Hir76, Chapter 8]). Nach Lemma 1.1.4 (ii) ist $\Phi_{0*} = \Phi_{1*}$.

Es bleibt also der Fluss auf den drei atomaren Flächenstücken zu konstruieren. Die Grafiken 2, 3 und 4 deuten die zugehörigen Vektorfelder an; eine explizitere Definition scheint überflüssig.

Die Menge $A = \Phi(1, \partial_{in}\Sigma_2)$ ist nun der gesuchte Graph. \square

Die Abbildungen 5(a) bis 5(d) zeigen die entstehende Isotopie nach jedem Schritt an; die fett gezeichneten Linien stellen das Bild des inneren Randes dar.

Um den Übergang zu der Begriffswelt zu finden, die Harer in seinen Arbeiten zur Homologiestabilisierung der Abbildungsklassengruppen verwendet,

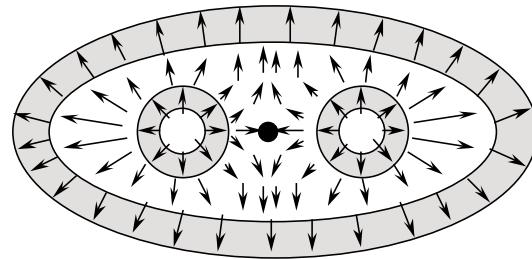
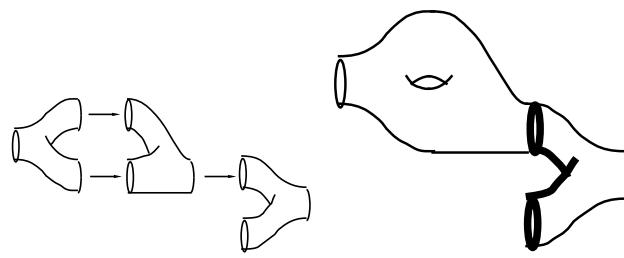
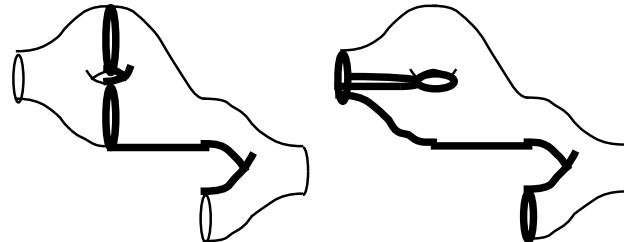


ABBILDUNG 4. Vektorfeld V auf einer Hose, die an zwei Randkomponente angeklebt wird



(a) Schritt 1

(b) Schritt 2



(c) Schritt 3

(d) Schritt 4

ABBILDUNG 5. Vier Schnapschüsse der Isotopie Φ

müssen wir nun den Graph A aus Proposition 1.1.8 noch weiter bearbeiten, bis er zu einem *Wegesystem* wird.

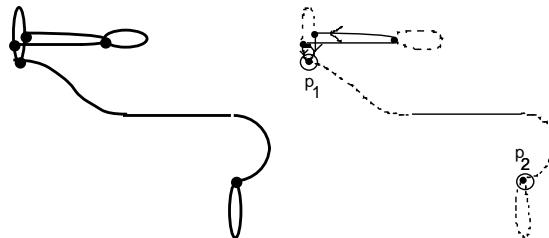
DEFINITION. Ein **einfacher Weg** auf einer Fläche Σ ist ein eingebettetes Intervall, dessen Endpunkte in den Rand abgebildet werden. Die Endpunkte dürfen auch zusammenfallen. Ein **Wegesystem** ist eine Familie solcher einfacher Wege mit folgenden Eigenschaften:

1. Je zwei Wege schneiden sich höchstens in den Endpunkten;
2. In jeder Randkomponente von Σ liegt höchstens ein Schnittpunkt mit dem ganzen Wegesystem;
3. Kein Weg ist trivial geschlossen, d.h. nullhomotop rel Endpunkte, und keine zwei Bögen sind isotop zueinander. Es wird aber nicht gefordert, dass die Bögen im Fundamentalgruppoid unabhängig sind.

Der Grund, solch spezielle Systeme zu betrachten, liegt darin, dass man aus diesen Systemen einen simplizialen Komplex aufbauen kann, dessen n -Simplizes Wegesysteme aus $n + 1$ Wegen sind, so dass das Komplement dieses Systems in der Fläche noch zusammenhängt. Die Randabbildungen sind dabei einfach das Weglassen des i -ten Wegs. Harer zeigt für eine Vielzahl von Varianten solcher Komplexe, dass sie hochzusammenhängend sind (z.B. in [Har85]). Wegesysteme wie oben definiert verwendet Harer auch in seiner Arbeit [Har90] für den Fall einer Randkomponente, um die Homologiestabilisierung für Spin–Abbildungsklassengruppen zu zeigen (s. Kapitel 3).

ZUSATZ. Ist ϕ ein Diffeomorphismus, der A punktweise festhält, so kann ϕ so deformiert werden, dass eine Umgebung U von A punktweise festgehalten wird. Innerhalb dieser Umgebung kann A in ein Wegesystem $\{\Gamma_j\}$ mit Randpunkten in Σ_2 deformiert werden, und diese Deformation kann auf ganz Σ so definiert werden, dass es die Identität außerhalb U ist. Es gilt:

1. $\text{Stab}_{\Gamma(\Sigma)} A = \text{Stab}_{\Gamma(\Sigma)} \{\gamma_j\}$
2. Jedes γ_j ist ein einfacher Weg mit Endpunkten in $\partial_{\text{out}} \Sigma_2$
3. $F - \bigcup_j \{\gamma_j\}$ ist zusammenhängend.



(a) Der Graph $A = \Phi_1(\partial_{\text{in}} \Sigma_1)$ zu der Fläche aus Abb. 5

(b) Ein zu A gehörender aufspannender Wald T

Beweis: Sei A der Graph aus 1.1.8 und T ein beliebiger aufspannender Wald (disjunkte Vereinigung von Bäumen), der genausoviele Komponenten hat

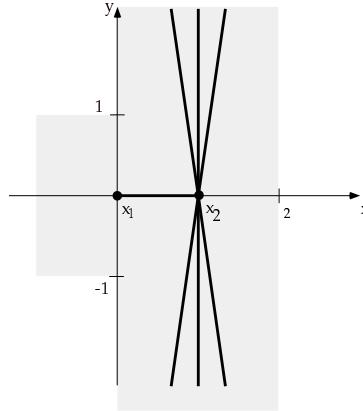


ABBILDUNG 6. Eine Umgebung U um eine Kante (x_1, x_2) mit 7-wertigem x_2

wie $\partial_{\text{out}}\Sigma_2$ und pro Komponente eine Wurzel $p_i \in (\partial_{\text{out}})_i\Sigma_2$ (siehe Abbildungen 6(a) und 6(b)). Was A von einem Wegesystem unterscheidet, sind die Knoten außerhalb der Randkomponenten. Daher konstruieren wir jetzt einen Fluss $\psi: I \times \Sigma \rightarrow \Sigma$, der alle diese Knoten in die p_i fließen lässt. D.h., $\psi_0 = \text{id}$ und $\psi_1(x) = p_i$ für jeden Knoten x und ein i .

Seien x_1 und x_2 zwei Knoten in A , wobei x_1 näher an der Wurzel liegt als x_2 , im Sinne der Ordnung, die durch den aufspannenden Wald T gegeben ist. Wir wählen eine Umgebung U um x_1, x_2 und die Kante dazwischen mit einer Karte $a: \mathbf{R}^2 \rightarrow F$ auf dieser Umgebung wie in Abbildung 6. Es gilt $a([0, 1] \times \{0\}) \subseteq A$ und $a(0, 0) = x_1$, $a(1, 0) = x_2$. Die einzigen Komponenten von A , die das Bild von $\mathbf{R} \times [-1, 1]$ treffen, seien die mit x_2 inzidenten Kanten.

Nun sei $r: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ eine glatte Abbildung, die mit $r(x) = 1$ für $x \leq 1$ und $r(x) = 0$ für $x \geq 2$. Definiere

$$\psi_{x_1, x_2}(x, y) = \begin{cases} (x, y); & \text{falls } x < 0 \text{ oder } |y| \geq 1; \\ (1 - r(x) + |y|r(x))x; & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung setzt sich auf ganz Σ fort und deformiert den Graphen so, dass die Ecke (x_1, x_2) auf einen Punkt abgebildet wird; überall sonst ist die Abbildung injektiv. Sie ist homotop zur Identität durch eine lineare Homotopie. Verkettet man die Abbildungen ψ_{x_1, x_2} für alle Kanten (x_1, x_2) in T von den Blättern von T ausgehend bis zur Wurzel, so erhält man die gewünschte Transformation in ein Bogensystem. \square

Unter welchen Bedingungen induziert nun eine Einbettung $\Sigma_1 \hookrightarrow \Sigma$ eine Inklusion der Abbildungsklassengruppen?

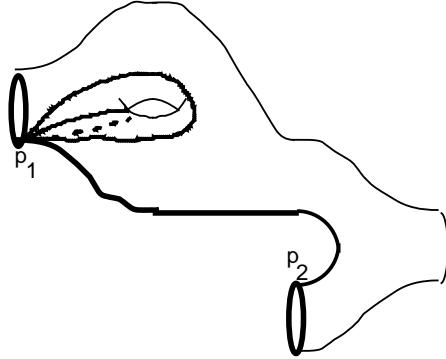


ABBILDUNG 7. Das Wegesystem, das sich für die Beispielfläche aus den Abbildungen 5, 6(a) und 6(b) ergibt.

BEISPIEL 1.1.9. Sei Σ_1 ein Ringgebiet und Σ die konvexe Hülle, eine Scheibe; die Inklusion kann offensichtlich keinen Monomorphismus induzieren, da $\Gamma(\Sigma_{0,2}) = \mathbf{Z}$, aber $\Gamma(\Sigma_{0,1}) = 0$.

In einem gewissen Sinne ist dies das einzige Gegenbeispiel:

PROPOSITION 1.1.10. *Sei $f: \Sigma_1 \hookrightarrow \Sigma$ eine Inklusion von Flächen, so dass jede Komponente von $\Sigma - \overset{\circ}{\Sigma}_1$ mindestens eine Komponente von $\partial\Sigma$ enthält (d.h. das obige Beispiel ist nicht zugelassen), und sei Σ zusammenhängend. Dann ist $f_*: \Gamma(\Sigma_1) \rightarrow \Gamma(\Sigma)$ injektiv.*

Beweis: Sei $P = \Sigma - \overset{\circ}{\Sigma}_1$. O.B.d.A. sei angenommen, dass P zusammenhängend ist, ansonsten kann das Argument auf jede Komponente angewendet werden. Genauso genügt es, den Fall einer Hose P zu betrachten, die an einer oder zwei Randkomponenten angenähert wird, ansonsten geht man per Induktion vor.

Im ersten Fall, der einer an einer Komponente angenäherten Hose, ist einfach: es ist nämlich $g: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma$ die Abbildung, die eine der zwei verbleibenden Randkomponenten von P zu einem Punkt identifiziert, so gilt $g \circ f \simeq \text{id}_{\Sigma_1}$, und daher ist $g_* f_* = \text{id}_{\Gamma(\Sigma_1)}$, also ist f_* injektiv.

Wird P an zwei Randkomponenten angeklebt, ist die Situation etwas schwieriger. Zunächst sei nach Proposition 1.1.8 angenommen, dass f isotop in eine surjektive schwache Einbettung deformiert worden ist. Das Wegesystem $A = f(\partial\Sigma_1) - \partial\Sigma$ besteht dann aus einem einzigen Weg, und zwar einer geschlossenen Kurve, und $\Gamma(\Sigma_1) = \Gamma(\Sigma, A)$.

Betrachte nun die Faserung

$$\text{Diff}^+(\Sigma, A) \hookrightarrow \text{Diff}^+(\Sigma) \twoheadrightarrow \frac{\text{Diff}^+(\Sigma)}{\text{Diff}^+(\Sigma, A)}.$$

Sei $\mathcal{I}(\Sigma)$ der Raum aller Einbettungen von S^1 en mit einem festen Endpunkt p , wobei wir $p = \partial A = A \cap \partial G$ setzen. Sei $a: (S^1, 1) \hookrightarrow (\Sigma, p)$ ein Grundpunkt für diesen Raum mit $\text{im}(a) = A$.

Der Kern der Abbildung $\text{Diff}^+(\Sigma) \rightarrow \mathcal{I}(\Sigma)$, $\phi \mapsto \phi \circ a$, ist gerade $\text{Diff}^+(\Sigma; A)$. Daher erhalten wir eine Einbettung

$$\frac{\text{Diff}^+(\Sigma)}{\text{Diff}^+(\Sigma, A)} \hookrightarrow \mathcal{I}(\Sigma).$$

Diese Einbettung hat die schöne Eigenschaft, dass mit einem Punkt von $\mathcal{I}(\Sigma)$ gleich die ganze Zusammenhangskomponente im Bild ist. Liegen nämlich zwei Einbettungen, o.B.d.A. a und eine weitere, a' , in der selben Komponente, so ist der Weg in $\mathcal{I}(\Sigma)$ eine Isotopie von Einbettungen. Jede solche Isotopie kann auf die umgebende Fläche fortgesetzt werden (vgl. [Eps66, Theorem 4.1]), daher erhalten wir zu dem Urbild von a' einen Weg in $\text{Diff}^+(\Sigma)$, der es mit id_Σ verbindet.

Daher ist

$$\pi_1 \left(\frac{\text{Diff}^+(\Sigma)}{\text{Diff}^+(\Sigma, A)} \right) = \pi_1(\mathcal{I}(\Sigma)),$$

und die rechte Seite ist trivial (siehe z.B. [Gra73]).

Somit sieht das rechte Ende der langen exakten Homotopiesequenz der Faserung so aus:

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(\mathcal{I}(\Sigma)) \xrightarrow{\partial_*} \pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma; A)) \longrightarrow \pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma)) \longrightarrow \cdots$$

$$\parallel \qquad \qquad \qquad \parallel$$

$$1 \qquad \qquad \Gamma(\Sigma; A) \qquad \qquad \Gamma(\Sigma)$$

Daher ist die Abbildung $\Gamma(\Sigma; A) \longrightarrow \text{Stab}_{\Gamma(\Sigma)}(A) \subseteq \Gamma(\Sigma)$ injektiv. \square

1.2. Punktierte AKG und Kurven im Tangentialbündel

In diesem Abschnitt, der als technische Vorbereitung für das Studium der masbaumschen Abbildungsklassengruppen („AKG“) notwendig ist, wird der Zusammenhang zwischen der Abbildungsklassengruppe $\Gamma(\Sigma)$ und der *punktierten Abbildungsklassengruppe* $\Gamma^1(\Sigma) := \Gamma(\Sigma; \text{pt.})$ untersucht. Zur Vermeidung von Sonderfällen sei hier immer angenommen, dass das Geschlecht mindestens zwei ist, falls die Fläche geschlossen ist. Das Tangentialbündel von Σ

bezeichne ich mit $T\Sigma$; das zugehörige Sphärenbündel $ST\Sigma$ ist das Bündel derjenigen Tangentialvektoren, die in einer gewählten Bündelmetrik die Länge 1 haben. (Es ist dabei unwesentlich, welche Metrik man wählt.) ST ist ein Funktor von der Kategorie der Flächen und Diffeomorphismen zwischen ihnen in die der Bündel, indem man für einen Diffeomorphismus $f: \Sigma_1 \xrightarrow{\cong} \Sigma_2$ definiert $STf = \frac{Tf}{\|Tf\|}$, wobei Tf die (nirgends verschwindende) Ableitung von f ist.

Auf $T\Sigma$ sei nun ein Grundpunkt $* = (p_0, v_0)$ ausgezeichnet. Die Untergruppe von $\text{Diff}^+(\Sigma)$, die aus denjenigen Diffeomorphismen besteht, die den Punkt (p_0, v_0) festhalten, sei mit $\text{Diff}^1(\Sigma)$ bezeichnet, deren Zusammenhangskomponenten mit $\Gamma^1(\Sigma)$. Die beiden Diffeomorphismengruppen sind Faser und Totalraum einer Faserung $\text{Diff}^1(\Sigma) \hookrightarrow \text{Diff}^+(\Sigma) \rightarrow ST\Sigma$, wobei die Bündelprojektion die Auswertung des Diffeomorphismus auf dem Grundpunkt ist, mit anschließender Normierung auf Länge 1. In diesem Abschnitt wird die Randabbildung der zugehörigen langen exakten Homotopiesequenz untersucht.

1.2.1. Die Abbildung $\Psi: \pi_1(ST\Sigma) \rightarrow K = \ker(\Gamma^1 \rightarrow \Gamma)$. Sei c eine differenzierbare, eingebettete, geschlossene Kurve in Σ . Dann definiert Tc , $(Tc)(t) = \frac{Tc|_t}{\|Tc|_t\|}$ eine differenzierbare, eingebettete, geschlossene Kurve in $ST\Sigma$, mithin ein Element von $\pi_1(ST\Sigma)$. Ist c nullhomotop, etwa der Rand einer kleinen Scheibe in Σ , so definiert Tc ein nichttriviales Element von $\pi_1(ST\Sigma)$, nämlich den Erzeuger der ersten Homotopiegruppe der Faser des Bündels $S^1 \rightarrow ST\Sigma \rightarrow \Sigma$.

LEMMA 1.2.1. *Jedes Element $\alpha \in \pi_1(ST\Sigma)$ kann als ein Produkt*

$$\alpha = T(c_1) \dots T(c_n)$$

dargestellt werden, wobei die c_i einfach geschlossene Kurven mit Grundpunkt p sind, die außer im Grundpunkt paarweise disjunkt sind.

Beweis: Sei $[\alpha] \in \pi_1(ST\Sigma)$. O.B.d.A. kann man annehmen, dass α glatt mit nur transversalen Selbstschnitten ist; das gleiche soll für die Projektion $\pi \circ \alpha$ auf Σ gelten. Mit einer kleinen lokalen Deformation des Wegs können wir erreichen, dass $(\pi \circ \alpha)'(0) = v_0$ gilt.

Selbstschnitte nach (p_0, v_0) schieben.

α kann nur endlich viele Selbstschnitte haben. Betrachte den in Bezug auf die s -Koordinate von $\alpha(s)$ ersten von (p_0, v_0) verschiedenen solchen Selbstschnittpunkt. Dieser lässt sich entlang $\alpha(t)$, $t \rightarrow 0$, nach (p_0, v_0) verschieben. Indem man diesen Vorgang iteriert, kann man alle Selbstschnitte auf den Grundpunkt ziehen und erhält einfache (d.h. selbstschnittfreie), bis auf den Grundpunkt paarweise disjunkte Kurven $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Sei jetzt α einfach. Definiere eine neue Kurve $tw(\alpha): I \rightarrow S^1$ durch:

$$\text{tw}(\alpha)(t) := \angle(\alpha(t), (\pi \circ \alpha)'(t)).$$

Es gilt: $\alpha = \text{tw}(\alpha) \circ T(\pi \circ \alpha)$. Eine Homotopie von $\text{tw}(\alpha)$ liefert somit eine Homotopie von α . Setze α nun folgendermaßen konstant fort:

$$\alpha: [0, 2] \longrightarrow ST\Sigma, \quad \alpha(s) = \begin{cases} \alpha(s); & s \leq 1; \\ (p_0, v_0); & s \geq 1. \end{cases}$$

und:

$$h: [0, 2] \times I \longrightarrow S^1, \quad h(s, t) = \begin{cases} 1; & s \leq t; \\ \text{tw}(\alpha)(t-s); & t \leq s \leq t+1; \\ 1; & s \geq t+1. \end{cases}$$

Dann ist $\alpha(s) \simeq h(s, 0) \cdot T(\pi \circ \alpha)(s)$ und

$$\alpha(s) \simeq h(s, 1) \cdot T(\pi \circ \alpha)(s) = \begin{cases} T(\pi \circ \alpha)(s); & s \leq 1; \\ (p; \text{tw}(s-1)); & s \geq 1. \end{cases}$$

Das Lemma ist bewiesen, wenn gezeigt ist, dass jede Kurve α mit $\pi \circ \alpha \equiv p_0$ homotop zu einem Produkt aus einfachen Kurven ist. O.B.d.A. (Umlaufzahl!) sei $\alpha(t) = \alpha_0 t$, $\alpha \in S^1$. Sei $U \subseteq \Sigma$, $\kappa: D^2 \xrightarrow{\cong} U$, $p_0 \in \partial U$ mit $\kappa(v_0) = p_0$. Dann repräsentiert $\kappa(\alpha_0 t)$ die Kurve α . \square

Sei nun α eine Kurve in Σ , und sei (c_1, \dots, c_n) die Regularisierung nach Lemma 1.2.1. Da Σ orientiert ist, ist es möglich, von der linken und der rechten Seite der Kurve zu sprechen: ein Normalenvektor v zu der Kurve im Punkt p heißt *links*, falls $(v, T\alpha|_p)$ eine positiv orientierte Basis von $T\Sigma|_p$ ist. Zu c_i wähle eine reguläre zylindrische Umgebung in Σ ; deren Rand links von c_i sei mit c_i^l , ihr rechter mit c_i^r bezeichnet. Dabei berühren weder c_i^l noch c_i^r den Grundpunkt p . Definiere nun

$$\Psi(\alpha) := \text{Tw}_{c_i^l} \text{Tw}_{c_i^r}^{-1} \dots \text{Tw}_{c_n^l} \text{Tw}_{c_n^r}^{-1}.$$

Tw_c bezeichnet dabei einen Dehn-Twist um die Kurve c .

LEMMA 1.2.2. $\psi: \pi_1(ST\Sigma) \longrightarrow K$ ist wohldefiniert und homomorph.

Beweis:

1. im $\Psi \subseteq K$: In der Tat sind die Kurven c_i^l und c_i^r in Σ homotop (allerdings nicht in $\Sigma - \{p_0\}$), daher ist das Bild von $\text{Tw}_{c_i^l} \text{Tw}_{c_i^r}^{-1}$ in Γ stets das neutrale Element.

2. *Homomorphie:* Die Multiplikativität ist nach der Definition von Φ klar. Außerdem gilt für die Inversen: $\Psi(\alpha^{-1}) = \text{Tw}_{(\alpha^{-1})^l} \text{Tw}_{(\alpha^{-1})^r}^{-1} = \text{Tw}_{\alpha^r} \text{Tw}_{\alpha^l}^{-1} = (\text{Tw}_{\alpha^l} \text{Tw}_{\alpha^r}^{-1})^{-1} = \Psi(\alpha)^{-1}$.
3. *Wohldefiniertheit:* Sei (c_1, \dots, c_n) Regularisierung einer nullhomotopen Kurve α in $ST\Sigma$. Nach der Konstruktion in Lemma 1.2.1 sind $\pi \circ c_1, \dots, \pi \circ c_n$ alle nullhomotop. Außerdem muss die Anzahl der linkslaufenden Kurven mit der der rechtslaufenden Kurven übereinstimmen, damit die Gesamtumlaufszahl in $ST\Sigma$ Null wird. Da Dehn-Twists um homotope Kurven homotop sind, folgt $\Psi(\alpha) = \text{id}$.

□

LEMMA 1.2.3. Ψ ist die Abbildung ∂ in der langen exakten Homotopiesequenz

$$\cdots \rightarrow \pi_1(ST\Sigma) \xrightarrow{\partial} \pi_0(\text{Diff}^1 \Sigma) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}^+ \Sigma) \rightarrow *$$

Beweis: Es genügt, dies für eine einfach geschlossene diffbare Kurve Tc , $c: I \rightarrow \Sigma$ zu zeigen, da ∂ und Ψ Homomorphismen sind. $\partial(c)$ ist definiert als $H(1)$, wobei H eine Lösung des Hochhebungsproblems

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\text{id}_{\text{Diff}}^1} & \text{Diff}^+ \Sigma \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ I & \xrightarrow{Tc} & ST\Sigma \end{array}$$

ist. Wählt man um c eine kleine zylindrische Umgebung in Σ mit positiv orientierten Koordinaten $(\theta, \varepsilon) \in S^1 \times]-1, 1[$, so vermittelt die Abbildung

$$H: I \rightarrow \text{Diff}^+ \Sigma, \quad H(t) = x \mapsto \begin{cases} x; & x \text{ außerhalb der Koordinaten;} \\ (\theta + e^{2\pi i \cdot \text{bump}(\varepsilon)}, \varepsilon); & x = (\theta, \varepsilon). \end{cases}$$

eine solche Hochhebung, wobei bump eine differenzierbare Funktion mit Träger $[-1, 1]$ ist, die bei 0 den Wert 1 annimmt und im Negativen steigt und im Positiven fällt. Bei dieser Funktion H sieht man offensichtlich, dass $H(1) = \text{Tw}_{c^l} \text{Tw}_{c^r}^{-1}$. □

1.2.2. Die Abbildung $\Phi: K \rightarrow \pi_1(ST\Sigma)$. Wir konstruieren jetzt eine Umkehrabbildung zu Ψ . Sei zunächst $\gamma \in K = \ker(\text{Diff}^1 \rightarrow \text{Diff}^+)$ beliebig gegeben. Da γ in Σ nullhomotop ist, wählen wir eine Homotopie $H: I \rightarrow \text{Diff}^+(\Sigma)$ mit $H(0) = \text{id}_\Sigma$, $H(1) = \gamma$. Wir können H so wählen,

dass $H^{ad}: I \times \Sigma \rightarrow \Sigma$ überall von maximalem Rang differenzierbar ist, somit erhalten wir auch eine Abbildung $T\mathcal{H}^{ad}: I \times ST\Sigma \rightarrow ST\Sigma$. Jetzt sei die differenzierbare Kurve $c: I \rightarrow ST\Sigma$ definiert durch $c(t) := T\mathcal{H}^{ad}(1-t, (p_0, v_0))$. c ist eine geschlossene Kurve (da $H(0), H(1) \in \text{Diff}^1 = \text{Stab}((p_0, v_0))$). Diese Kurve nennen wir provisorisch $\Phi_H(\gamma)$.

LEMMA 1.2.4. $\Phi_H(\gamma)$ ist bis auf Homotopie unabhängig von der Wahl von H und homomorph.

Beweis: Homomorphie: Sind $\gamma_1, \gamma_2 \in K$ zwei Diffeomorphismen mit Nullhomotopien H_1, H_2 , so ist $H_1 * H_2$ eine Nullhomotopie für $\gamma_1 \circ \gamma_2$. Damit folgt $\Phi_{H_1 * H_2}(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \Phi_{H_1}(\gamma_1) * \Phi_{H_2}(\gamma_2)$. Ist $\gamma = \text{id}_\Sigma$, so liefert die Nullhomotopie $H(t) \equiv \text{id}_\Sigma$ den konstanten Weg, also $\Phi(\text{id}) = 1$.

Wohldefiniertheit: Es genügt zu zeigen, dass für jede Homotopie H zwischen id_Σ und id_Σ , $\Phi_H(\text{id}) \simeq 1$ gilt. Eine solche Homotopie ist aber ein Element aus $\pi_1(\text{Diff}^+)$. Earle und Eells haben in [EE67] gezeigt, dass diese Gruppe für Flächen Σ mit Randkomponenten oder ab Geschlecht 2 immer trivial ist. Damit lässt sich H zusammenziehen und diese Zusammenziehung liefert eine Nullhomotopie des Weges $\Phi_H(\text{id})$. \square

LEMMA 1.2.5. $\Phi = \Psi^{-1}$

Beweis:

$$1. \Phi \circ \Psi = \text{id}_{\pi_1(ST\Sigma)}.$$

Sei c eine einfach geschlossene, differenzierbare Kurve in Σ . Wegen der Homomorphie genügt es zu zeigen, dass für diese Kurve $\Phi(\Psi(c)) \simeq c$ gilt. Per Definition ist $\Psi(c) = \text{Tw}_{c^l} \text{Tw}_{c^r}^{-1}$. Es ist nun leicht, eine Nullhomotopie H von $\Psi(c)$ zu finden, so dass $\Phi(\Psi(c)) = c$.

$$2. \Psi \circ \Phi = \text{id}_K.$$

Sei $\gamma \in K$ mit einer Nullhomotopie H . Wie im Beweis von Lemma 1.2.1 können wir o.B.d.A. (durch eventuelles Deformieren des Diffeomorphismus) annehmen, dass $\Phi(\gamma) = Tc$ für eine einfach geschlossene Kurve c . Zu zeigen ist, dass $\text{Tw}_{c^l} \text{Tw}_{c^r}^{-1} \simeq \gamma$, oder äquivalent, dass $\text{Tw}_{c^r} \text{Tw}_{c^l}^{-1} \gamma \simeq \text{id}_\Sigma$. Sei $\bar{H}: I \rightarrow \text{Diff}^+$ eine Homotopie von id nach $\text{Tw}_{c^r} \text{Tw}_{c^l}^{-1}$ mit $\bar{H}(t)(*) = c(t) = H(t)(*)$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \bar{H}^{-1} \circ H(0) &= \text{id} \\ \bar{H}^{-1} \circ H(1) &= \text{Tw}_{c^r} \text{Tw}_{c^l}^{-1} \gamma \\ \bar{H}^{-1} \circ H(t)(*) &= *, \quad \text{also } \bar{H}^{-1} \circ H \in \text{Diff}^1. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\text{Tw}_{c^r} \text{Tw}_{c^l}^{-1} \gamma \simeq \text{id}_\Sigma$ in Diff^1 .

□

KAPITEL 2

Spinstrukturen auf Flächen und Spin-AKG

2.1. Spinstrukturen

Sei M eine beliebige kompakte, differenzierbare und orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n . Mit $\tau: M \rightarrow BSO$ sei die klassifizierende Abbildung des stabilen Tangentialbündels bezeichnet, wobei $SO := \varinjlim SO(n)$. M soll also eine Metrik auf dem Tangentialbündel haben; diese Voraussetzung kann man aber auch leicht umgehen, indem man statt SO die nicht-kompakte Gruppe SL verwendet. Die Gruppe $SO(n)$ hat eine zweiblättrige Überlagerung $Spin(n) \xrightarrow{\pi} SO(n)$; dies ist die universelle Überlagerung für $n \geq 3$, denn dann gilt $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$; in dem Fall von Flächen ist jedoch $SO(2) \simeq S^1$ und damit ist ebenfalls $Spin(2) \simeq S^1$.

DEFINITION. Eine w_2 -**Struktur** auf M (genauer auf dem Bündel τ) ist ein primitives $Spin(n)$ -Bündel auf M zusammen mit einem Bündelmorphismus auf das zu τ assoziierte Prinzipalbündel, der faserweise der Projektion $Spin(n) \rightarrow SO(n)$ entspricht. Eine **Spinstruktur** ist eine Äquivalenzklasse von w_2 -Strukturen.

In der Sprache der Homotopietheorie kann man eine w_2 -Struktur äquivalent definieren als eine Hochhebung:

$$\begin{array}{ccc} & B\text{ Spin} & \\ & \nearrow & \downarrow B\pi \\ M & \xrightarrow{\tau} & BSO \end{array}$$

und eine Spinstruktur entsprechend als eine Homotopieklassie solcher Hochhebungen.

Die Bezeichnung als w_2 -Struktur hat den folgenden Grund: die zweite Stiefel-Whitney-Klasse des universellen Bündels über BSO definiert eine Abbildung in $[BSO, K(\mathbb{Z}_2, 2)]$, deren Homotopiefaser $B\text{ Spin}$ ist.

Nicht jede Mannigfaltigkeit lässt eine Spinstruktur zu, und sie sind auch im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Beides lässt sich jedoch recht

leicht mit homologischen Mitteln nachprüfen. Wenn E das prinzipiale $SO(n)$ -Bündel der Einheitsrahmen auf M bezeichnet, so betrachte ich die Leray-Serre-Spektralsequenz zu der Faserung $SO(n) \rightarrow E \rightarrow M$,

$$E_2^{p,q} = H^p(M; \mathfrak{H}^q(SO(n); \mathbf{Z}/2)) \Rightarrow H^{p+q}(E; \mathbf{Z}/2).$$

Das lokale Koeffizientensystem $\mathfrak{H}^q(SO(n); \mathbf{Z}/2)$ ist trivial, denn

$$H^q(SO(n); \mathbf{Z}/2) \leq \mathbf{Z}/2,$$

und hat damit keine nichttrivialen Automorphismen. Daher erhält man als E_2 -Term (unter Unterdrückung der $\mathbf{Z}/2$ -Koeffizienten):

$$\begin{array}{c|ccccc} & & & & & \\ 0 & & \vdots & & & \\ 0 & H^0(M; H^1(SO(n))) & H^1(M; H^1(SO(n))) & & \dots & \\ 0 & H^0(M; H^0(SO(n))) & H^1(M; H^0(SO(n))) & H^2(M; H^0(SO(n))) & \dots & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Da das erste Differenzial d_2 schon den Grad $(-1, 2)$ hat, ist $E_2^{0,1} = E_\infty^{0,1}$ und

$$E_\infty^{1,0} = E_3^{1,0} = \ker(d_2: E_2^{1,0} \rightarrow E_2^{0,2})$$

und wir erhalten die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{\pi^*} H^1(E) \xrightarrow{\iota^*} E_2^{1,0} \xrightarrow{d^*} E_2^{0,2}$$

oder

$$0 \rightarrow H^1 M \xrightarrow{\pi^*} H^1(E) \xrightarrow{\iota^*} H^1 SO(n) = \mathbf{Z}/2 \xrightarrow{d^*} H^2(M).$$

Nun ist eine Spinstruktur ja eine doppelte Überlagerung von E und damit repräsentiert sie eine Homologieklasse in $H^1(E; \mathbf{Z}/2)$; andererseits bedeutet die Bedingung, dass die Überlagerung faserweise nichttrivial ist, dass diese Homologieklasse unter ι^* nicht nach 0 geht. Eine solche Klasse existiert offenbar genau dann, wenn ι^* surjektiv ist, also wegen der Exaktheit der Sequenz genau dann, wenn $d^* = 0$ gilt. Das Bild des Erzeugers von $H^1(SO(n); \mathbf{Z}/2)$ in $H^2(M; \mathbf{Z}/2)$ ist aber die zweite Stiefel-Whitney-Klasse w_2 von E ; damit existieren also Spinstrukturen genau dann, wenn $w_2(E) = 0$, und in diesem Fall gibt es einen *affinen* Isomorphismus zwischen der Menge der Spinstrukturen und $H^1(M; \mathbf{Z}/2)$ via π^* .

Von nun an sei $M = \Sigma$ eine Fläche vom Geschlecht g wie in Kapitel 1. Es gibt grundsätzlich Spinstrukturen auf Σ , denn:

1. Im Fall einer Fläche mit Rand ist $H^2\Sigma = 0$ und damit $w_2 = 0$.
2. Für geschlossene Flächen ist $w_2 = e \bmod 2$, die Eulerklasse ist aber dual zu der Eulercharakteristik $2 - 2g$ und damit gerade.

Daher erhalten wir kurze exakte Sequenzen in der Kohomologie und Homologie:

$$0 \longrightarrow H^1(\Sigma; \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{\pi^*} H^1(ST\Sigma; \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{i^*} \mathbf{Z}/2 \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \xrightarrow{i_*} H_1(ST\Sigma; \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{\pi_*} H_1(\Sigma; \mathbf{Z}/2) \longrightarrow 0.$$

Da $H^1(ST\Sigma; \mathbf{Z}/2) \simeq \text{Hom}(H_1(ST\Sigma); \mathbf{Z}/2) \simeq \text{Hom}(\pi_1(ST\Sigma); \mathbf{Z}/2)$, können wir eine algebraischere Definition von Spinstrukturen auf Flächen verwenden:

DEFINITION. Eine **Spinstruktur** auf Σ ist ein Homomorphismus

$$\sigma: \pi_1(ST\Sigma; \mathbf{Z}/2) \longrightarrow \mathbf{Z}/2,$$

der auf den Fasern nichttrivial ist, d.h. $\sigma(i_*(1)) \neq 0$.

Die Menge aller Spinstrukturen auf einer festen Fläche entspricht bijektiv den *quadratischen Formen* auf $H_1(\Sigma; \mathbf{Z}/2)$. Die wurde von Atiyah in [Ati71] gezeigt und später von Johnson [Joh80] auf eine recht verschiedene Weise. Daher arbeiten wir mit einer weiteren Definition:

DEFINITION. Eine **Spinstruktur** auf einer zusammenhängenden Fläche Σ ist eine quadratische Form

$$Q: H_1(\Sigma; \mathbf{Z}/2) \longrightarrow \mathbf{Z}/2,$$

die die Schnittform induziert. Das heißt, Q genügt der Identität

$$Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + \langle x, y \rangle,$$

wobei

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: H_1(\Sigma; \mathbf{Z}/2) \otimes H_1(\Sigma; \mathbf{Z}/2) \longrightarrow H_0(\Sigma; \mathbf{Z}/2)$$

die Schnittform ist und $H_0(F; \mathbf{Z}/2)$ mit $\mathbf{Z}/2$ identifiziert wird. Ist $f: \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ eine Abbildung zwischen Flächen und Q_2 eine Spinstruktur auf Σ_2 , so definiert $f^*(Q_2)$ eine Spinstruktur auf Σ_1 , wobei $f^*(Q_2)(\alpha) = Q_2(f_*(\alpha))$ für $\alpha \in H_1(\Sigma_1; \mathbf{Z}/2)$ ist. Falls auch auf Σ_1 eine Spinstruktur Q_1 gegeben ist und $Q_1 = f^*(Q_2)$, so heißt $f: (\Sigma_1, Q_1) \longrightarrow (\Sigma_2, Q_2)$ eine **Abbildung von Spinflächen**.

BEMERKUNG 2.1.1. In der Definition fordern wir nicht, dass Σ geschlossen ist. In der Tat kann eine Spinstruktur Q beliebige Werte auf den Randkomponenten $\partial_1\Sigma, \dots, \partial_r\Sigma$ annehmen, falls die notwendige Bedingung $Q(\partial_1 + \dots + \partial_r) = 0$ erfüllt ist (denn $\partial_1 + \dots + \partial_r \sim 0$). Das gleiche gilt für die Werte

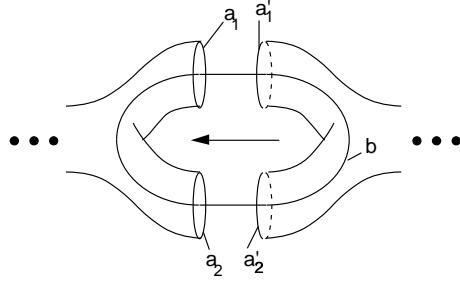


ABBILDUNG 1. Um die Flächen Σ_1, Σ_2 entlang zweier Randkomponenten zu verkleben, muss $Q_1(a_i) = Q_2(a_i)$ ($i = 1, 2$) gelten. Der Wert $Q(b)$ ist aber undefiniert und kann beliebig gewählt werden.

einer Spinstruktur σ auf den Homotopieklassen der Randkomponenten (die bis auf Konjugation bestimmt sind).

BEMERKUNG 2.1.2. Ist Σ aber doch geschlossen, so gibt es bis auf (nicht kanonischen) Isomorphismus (aufgefasst in der Kategorie der Spinflächen und schwachen Einbettungen von Spinstrukturen) nur zwei verschiedene Spinstrukturen, die durch ihre *Arf-Invariante*

$$\alpha(\Sigma) := \sum_{i=1}^g Q(a_i)Q(b_i) \in \mathbf{Z}_2$$

klassifiziert werden. Dabei ist (a_i, b_i) eine symplektische Basis von $H_1(\Sigma; \mathbf{Z}_2)$ ($\langle a_i, a_j \rangle = \langle b_i, b_j \rangle = 0, \langle a_i, b_j \rangle = \delta_{i,j}$).

Falls Σ aber Rand hat, so gibt es mehr verschiedene Spinstrukturen: ist etwa $Q(\partial_i \Sigma) = 1$ für r_1 der r Randkomponenten von Σ , so gilt das offensichtlich auch für jedes isomorphe Bild. Aus $Q(\partial \Sigma) = 0$ folgt, dass r_1 gerade sein muss. Es ist daher leicht zu sehen, dass es eine Bijektion zwischen den Äquivalenzklassen von Spinstrukturen und der Menge $\mathbf{Z}_2 \times \{\mathbf{0}, \dots, [\frac{r}{2}]\}$.

BEMERKUNG 2.1.3. Man beachte, dass es nicht so leicht ist, Flächen zu verkleben, wenn sie Spinstrukturen tragen. Um Kompatibilität zu gewährleisten, müssen die Spinstrukturen auf den zu verklebenden Randkomponenten übereinstimmen, was auch der Grund dafür ist, dass später nur Spinstrukturen betrachtet werden, die auf allen Randkomponenten zu 0 werden. Für die Verklebung entlang einer Randkomponente ergibt sich dann auch eine wohldefinierte Spinstruktur auf der Vereinigung — nicht jedoch für allgemeine Verklebungen. Abbildung 1 zeigt das Problem auf.

LEMMA 2.1.4. Auf einer Fläche Σ vom Geschlecht g gibt es $2^{g-1}(2^g + 1)$ gerade und $2^{g-1}(2^g - 1)$ ungerade Spinstrukturen, wenn man $Q(\partial_i) = 0$ für alle Randkomponenten ∂_i fordert.

Beweis: Sei n_g^i ($i = 0, 1$) die Anzahl der Spinstrukturen auf Σ mit Arf-Invariante i .

Auf einem Torus $\Sigma_{1,n}$ mit den Homologieerzeugern $a, b \in H_1(\Sigma_{1,n}; \partial)$ gibt es nur eine ungerade Spinstruktur, nämlich $Q(a) = Q(b) = 1$, die anderen drei Kombinationen sind gerade. Da das Verkleben von Spinflächen der Addition der Arf-Invarianten entspricht, erhalten wir die folgenden rekursiven Formeln:

$$\begin{aligned} n_g^0 &= 3n_{g-1}^0 + n_{g-1}^1 \\ n_g^1 &= n_{g-1}^0 + 3n_{g-1}^1, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung $n_g^0 = 2^{g-1}(2^g + 1)$ und $n_g^1 = 2^{g-1}(2^g - 1)$ folgt. \square

2.2. Spin-Abbildungsklassengruppen

In dieser Arbeit beschäftige ich mich mit zwei miteinander verwandten Arten von Abbildungsklassen von Spinflächen. Die erste Definition erscheint zunächst kanonischer:

DEFINITION. Die **Spin-Abbildungsklassengruppe** einer Fläche (Σ, Q) mit Spinstruktur ist die Gruppe

$$\Gamma_Q(\Sigma) = \pi_0 \text{Aut}(\Sigma; \partial\Sigma) = \pi_0 \{f \in \text{Diff}^+(\Sigma; \partial\Sigma) \mid f^*Q = Q\}$$

beziehungsweise für Spinstrukturen $\sigma: \pi_1(S\Gamma\Sigma) \rightarrow \mathbf{Z}_2$:

$$\Gamma_\sigma(\Sigma) = \pi_0 \{f \in \text{Diff}^+(\Sigma; \partial\Sigma) \mid \sigma = \sigma \circ (S\Gamma f)\},$$

wobei $S\Gamma f := \frac{Tf}{\|Tf\|}$ und Tf die Ableitung von f ist.

Ist Q eine Spinstruktur der Arf-Invariante $i \in \{0, 1\}$ auf einer Fläche $\Sigma_{g,n}$ mit $Q(\partial_i) = 0$ für alle Randkomponenten, so schreiben wir auch $\Gamma_{g,n}^{(i)} := \Gamma_Q(\Sigma_{g,n})$.

- Ebensogut könnte man $\Gamma_Q(\Sigma)$ als den Stabilisator von Q in $\Gamma(\Sigma)$ definieren, da isotope Abbildungen gleiche Abbildungen in der Homologie induzieren. Da $\Gamma_{g,n}$ transitiv auf der Menge aller Spinstrukturen der Arf-Invariante i operiert und $\Gamma_{g,n}^{(i)}$ isomorph zum Stabilisator einer jeden solchen Spinstruktur ist, ist der Index von $\Gamma_{g,n}^{(i)}$ in $\Gamma_{g,n}$ endlich, nämlich:

$$[\Gamma_{g,n} : \Gamma_{g,n}^{(0)}] = 2^{g-1}(2^g + 1),$$

$$[\Gamma_{g,n} : \Gamma_{g,n}^{(1)}] = 2^{g-1}(2^g - 1).$$

Man könnte vermuten, dass daher die Spin–Abbildungsklassengruppen ähnliche homologische Eigenschaften wie die Abbildungsklassengruppen ohne Spin haben. In der Tat ist die Transferabbildung

$$\text{tr}: H_*(\Gamma_{g,n}^{(i)}; \mathbf{Q}) \longrightarrow H_*(\Gamma_{g,n}; \mathbf{Q})$$

injektiv mit Rechtsinversem $\frac{1}{[\Gamma_{g,n} : \Gamma_{g,n}^{(i)}]} \iota_*$, wobei $\iota: \Gamma_{g,n}^{(i)} \longrightarrow \Gamma_{g,n}$ die Inklusion ist. Daher erhält man eine Aufspaltung der rationalen Homologiegruppen

$$H_*(\Gamma_{g,n}^{(i)}; \mathbf{Q}) \cong H_*(\Gamma_{g,n}; \mathbf{Q}) \oplus \text{etwas},$$

wobei man noch nicht weiß, ob „etwas“ wirklich nichttrivial ist, zumindest für $g \gg k$.

2.3. Spin–Abbildungsklassengruppen nach Masbaum

In diesem Abschnitt führe ich den zweiten Typ von Spin–Abbildungsklassengruppen ein, den ich untersuche. Es handelt sich hierbei um eine Erweiterung der bisherigen Spin–Abbildungsklassengruppen durch \mathbf{Z}_2 . Die Definition geht auf Masbaum [Mas97] zurück.

Auf der Fläche Σ sei eine Spinstruktur σ gegeben als Homomorphismus $\sigma: \pi_1(\mathbf{ST}\Sigma) \longrightarrow \mathbf{Z}_2$, der auf der Faser nichttrivial ist: $\sigma(\pi^{-1}(*)) = 1$. Nach Abschnitt 1.2 haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbf{ST}\Sigma) \cong K \longrightarrow \Gamma^1 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1.$$

DEFINITION. $K_\sigma := \Psi(\ker \sigma) \subseteq K \triangleleft \Gamma^1$.

- Da σ surjektiv ist, hat sein Kern Index 2 in $\pi_1(\mathbf{ST}\Sigma)$; daher gilt auch $[K : K_\sigma] = 2$. Ein Element, das in K , aber nicht in K_σ liegt, ist das Bild δ unter Ψ eines Elements in $\pi_1(\mathbf{ST}\Sigma)$, das durch den Rand einer eingebetteten Scheibe in Σ definiert wird; das Bild ist der Twist um die Markierung (p_0, v_0) . Obwohl $K_\sigma \triangleleft K \triangleleft \Gamma^1$, ist K_σ in Γ^1 nicht normal; vielmehr gilt:

LEMMA 2.3.1 (Masbaum). *Sei $\gamma \in \Gamma^1$, σ eine Spinstruktur. Dann gilt*

$$\gamma^{-1} K_\sigma \gamma = K_{\gamma^* \sigma},$$

wobei $(\gamma^* \sigma)(c) = \sigma(\gamma(c))$ für $c \in \pi_1(\mathbf{ST}\Sigma)$.

Beweis: Nach Lemma 1.2.5 gilt: $f \in K_\sigma \Leftrightarrow \Psi^{-1}(f) \in \ker \sigma$. Sei also nach Konstruktion von Ψ^{-1} (vgl. 1.2.2) $H: I \longrightarrow \text{Diff}^+(\Sigma)$ eine Homotopie mit $H_0 = \text{id}_\Sigma$, $H_1 = f$ und $c(t) = H(1-t, *)$ ein Repräsentant von $\Psi^{-1}(f)$. Dann gilt also: $f \in K_\sigma \Leftrightarrow \sigma(c) = 0$.

Definiere nun $\bar{H}: I \longrightarrow \text{Diff}^+(\Sigma)$, $\bar{H}(t) = \gamma^{-1} \circ H(t) \circ \gamma$. Dann ist $\bar{H}(0) = \text{id}_\Sigma$, $\bar{H}(1) = \gamma^{-1} \circ f \circ \gamma$. \bar{H} ist also zur Konstruktion von $\Psi^{-1}(\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma)$ zu gebrauchen. Der zugehörige Weg $\bar{\gamma}$ ist:

$\bar{c}(t) = \overline{H}(1-t, *) = \gamma^{-1}(H(1-t, \gamma(*))) = \gamma^{-1}(H(1-t, *)),$
denn $\gamma \in \text{Diff}^1 \Sigma$.
Es ist zu zeigen, dass $\gamma^{-1}f\gamma \in K_{\gamma^*\sigma}$, also $(\gamma^*\sigma)(\Psi^{-1}(\gamma^{-1}f\gamma)) = 0$. Aber

$$\begin{aligned} (\gamma^*\sigma)\Psi^{-1}(\gamma^{-1}f\gamma) &= (\gamma^*\sigma)\gamma^{-1}(H(1-t, *)) \\ &= \sigma(\gamma(\gamma^{-1}(H(1-t, *)))) \\ &= \sigma(H(1-t, *)) = \sigma(c) = 0. \end{aligned}$$

□

KOROLLAR 2.3.2. Sei $N(K_\sigma)$ der Normalisator von K_σ in Γ^1 und

$$\Gamma_\sigma^1 := \left\{ f \in \Gamma^1 \mid f^*\sigma = \sigma \right\}.$$

Dann gilt: $N(K_\sigma) = \Gamma_\sigma^1$.

Beweis: Sind $\sigma \neq \tau$ Spinstrukturen, so muss auch $\ker \sigma \neq \ker \tau$ sein. Da Ψ injektiv ist, gilt also auch $K_\sigma \neq K_\tau$.

Damit haben wir:

$$\gamma \in N(K_\sigma) \Leftrightarrow \gamma^{-1}K_\sigma\gamma = K_\sigma \Leftrightarrow K_{\gamma^*\sigma} = K_\sigma \Leftrightarrow \gamma^*\sigma = \sigma \Leftrightarrow \gamma \in \Gamma_\sigma^1.$$

□

K ist eine Untergruppe (sogar ein Normalteiler) von Γ_σ^1 , denn wenn wir einen Erzeuger $\text{Tw}_{c^l} \text{Tw}_{c^r}^{-1}$ von K nehmen, so sehen wir, dass für eine beliebige Spinstruktur σ gilt:

$$\left(\text{Tw}_{c^l} \text{Tw}_{c^r}^{-1} \right)^*(\sigma) = \sigma \circ \text{Tw}_{c^l} \circ \text{Tw}_{c^r}^{-1} = \sigma,$$

da c^l und c^r homotop in Σ sind.

Aus $\Gamma^1/K = \Gamma$ folgt $\Gamma_\sigma^1/K = \Gamma_\sigma = \{f \in \Gamma \mid f^*\sigma = \sigma\}$, und da $K\sigma$ in K den Index 2 hat, ist Γ_σ^1/K_σ eine Erweiterung von Γ_σ durch \mathbb{Z}_2 ; diese Gruppe werde ich unten weiter studieren.

DEFINITION. Die masbaumsche Spin-Abbildungsklassengruppe der Fläche Σ mit der Spinstruktur σ ist

$$\tilde{\Gamma}_\sigma := \Gamma_\sigma^1/K_\sigma$$

KAPITEL 3

Die Homologie der Spin–Abbildungsklassengruppen

3.1. Die Homologie der Gruppen Γ_Q

Wir kehren zunächst zurück zu unseren Spin–Abbildungsklassengruppen Γ_Q . Harer hat in [Har90] den folgenden Satz bewiesen:

SATZ 3.1.1 (Harer). *Sei $\Sigma = \Sigma_{g,1}$ eine Fläche mit einer Randkomponente und γ ein Wegesystem auf Σ . Sei c ein weiterer Weg, so dass $\gamma' := \gamma \cup c$ wiederum ein Kurvensystem ist. Dann induziert die Inklusion*

$$\text{Stab}_{\Gamma_Q(\Sigma)} \gamma' \hookrightarrow \text{Stab}_{\Gamma_Q(\Sigma)} \gamma$$

einen Isomorphismus

$$i: H_k(\text{Stab}_{\Gamma_Q} \gamma'; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} H_k(\text{Stab}_{\Gamma_Q} \gamma; \mathbf{Z}) \quad \text{für } \text{genus}(\Sigma - \gamma) \geq 4k + 2.$$

Wir können mit den Methoden aus Kapitel 1 diesen Satz umformulieren:

KOROLLAR 3.1.2. *Sei (Σ, Q) eine zusammenhängende Unter-Spinfläche einer Spinfläche (Σ', Q') , so dass jede Komponente von $\Sigma' - \Sigma$ mindestens eine Randkomponente von Σ' enthält. Dann induziert die Inklusion*

$$f: (\Sigma, Q) \hookrightarrow (\Sigma', Q')$$

einen Isomorphismus

$$f_*: H_k(\Gamma_Q(\Sigma); \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} H_k(\Gamma_{Q'}; \mathbf{Z}) \quad \text{für } \text{genus}(\Sigma) \geq 4k + 2.$$

Beweis: Σ' habe das Geschlecht g' und r' Randkomponenten. Dann kann Σ' in eine Fläche $\Sigma_1 = \Sigma_{g'+r'-1,1}$ durch wiederholtes Ankleben von Hosen an jeweils zwei Randkomponenten von Σ' eingebettet werden. Es sei Q_1 eine Spinstruktur auf Σ_1 , so dass diese Einbettung eine von Spinflächen ist. Q_1 kann man etwa so konstruieren: Wähle zwei Randkomponenten von Σ' , ∂_1 und ∂_2 ; es sei $Q(\partial_i) = a_i$ (vgl. Abbildung 1). Es müssen nun zwei neue Q -Werte gewählt werden, nämlich der Wert a auf dem dritten Rand der Hose und der Wert b . Da $a + a_1 + a_2 = 0$ gelten muss, setzt man $a := a_1 + a_2$; b kann dagegen beliebig gewählt werden.

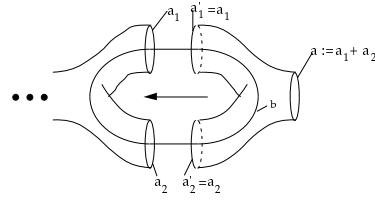


ABBILDUNG 1. Das Ankleben einer Hose kann stets mit der Spinstruktur verträglich gemacht werden.

Diese Inklusion von Spinflächen kann nun nach Proposition 1.1.8 in eine surjektive schwache Einbettung i' deformiert werden. Ebenso sei g eine surjektive Deformation von f und $i := i' \circ g$, wiederum eine surjektive schwache Einbettung. Dann erhalten wir zwei Kurvensysteme γ und γ' , nämlich die Bilder von $\partial\Sigma$ bzw. $\partial\Sigma'$ in Σ_1 . Nach Lemma 1.1.7 ist $i_*: \Gamma(\Sigma) \rightarrow \text{Stab}_{\Gamma(\Sigma_1)} \gamma$ surjektiv und nach Proposition 1.1.10 injektiv; dasselbe gilt für i' und γ' . Nach Definition ist $\gamma' \subseteq \gamma$, und wenn wir alles mit dem Stabilisator der quadratischen Form schneiden, erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_Q(\Sigma) & \xrightarrow[i]{\cong} & \text{Stab}_{\Gamma_{Q_1}(\Sigma_1)} \gamma \\ \downarrow f & & \downarrow \text{incl.} \\ \Gamma_{Q'}(\Sigma') & \xrightarrow[i']{\cong} & \text{Stab}_{\Gamma_{Q_1}(\Sigma_1)} \gamma'. \end{array}$$

Daraus folgt die Stabilität der k -ten Homologie, falls das Geschlecht von $(\Sigma_1 - \gamma)$ = Geschlecht von F größer oder gleich $4k + 2$ ist. \square

KOROLLAR 3.1.3. *Sei (Σ, Q) eine Spinfläche und P eine Hose. Dann induziert das Anheften von P an Σ , entlang einer oder zweier Randkomponenten, mit einer beliebigen Erweiterung der Spinstruktur, einen Isomorphismus in den k -ten Homologiegruppen, falls das Geschlecht von Σ nicht kleiner als $4k + 2$ ist.*

Beweis: Dies ist im Wesentlichen ein Spezialfall des obigen Korollars, bis auf den Fall, wo mit P zwei disjunkte Komponenten von Σ zusammengeklebt werden. In letzterem Fall aber gilt die, weil man Korollar 3.1.2 nacheinander zunächst auf das Ankleben der Hose an eine der Komponenten und dann auf deren Ankleben an die andere anwenden kann. \square

Wir wissen immer noch nicht, was in der Homologie geschieht, wenn man eine Scheibe anklebt und damit die Anzahl der Randkomponenten verringert.

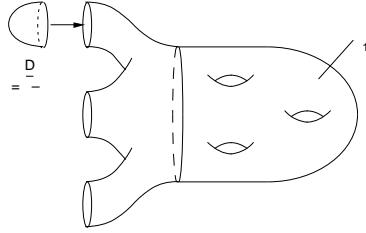


ABBILDUNG 2. Ankleben einer Scheibe an eine Fläche

(Dies geht natürlich nur, falls die quadratische Form Q auf dieser Randkomponente den Wert 0 annimmt.) Harer zeigt in seinem Artikel [Har90], dass das Anheften einer Scheibe an eine Fläche mit genau einer Randkomponente einen Isomorphismus in H_k induziert, falls das Geschlecht $\geq 4k + 7$ ist. Gleiches gilt für Flächen, die mehr als eine Randkomponente haben:

KOROLLAR 3.1.4. *Sei (Σ, Q) eine Spinfläche und ∂ eine Randkomponente von Σ mit $Q(\partial) = 0$. Dann induziert das Anheften einer Scheibe D entlang ∂ einen Isomorphismus in H_k , falls das Geschlecht von Σ nicht kleiner als $4k + 7$ ist.*

Beweis: Der Fall mit einer Randkomponente wurde von Harer bewiesen [Har90]. Habe also Σ mindestens zwei Randkomponenten, und sei $\bar{\Sigma}$ die Fläche, die entsteht, wenn an D an ∂ angeklebt wird. Σ_1 sei eine Unterfläche von Σ vom gleichen Geschlecht, aber mit nur einer Randkomponente (vgl. Abbildung 2).

Dann sind die Inklusionen kompatibel:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_1 & \longrightarrow & \Sigma \\ & \searrow & \downarrow i \\ & & \bar{\Sigma}, \end{array}$$

wobei i die Abbildung ist, die von der Anheftung der Scheibe induziert wird. Korollar 3.1.2 ist auf die anderen beiden Inklusionen anwendbar, und daher ist auch $i_*: H_k(\Gamma_Q(\Sigma)) \rightarrow H_k(\Gamma_Q(\bar{\Sigma}))$ ein Isomorphismus für Geschlecht nicht kleiner als $4k+2$. Diese bessere Schranke ist freilich nur im Fall gültig, wo $\bar{\Sigma}$ nicht geschlossen ist. \square

3.2. Die Homologie der Gruppen $\tilde{\Gamma}_\sigma$

In diesem Abschnitt soll die Stabilisierung der Homologie, die sich bei den Abbildungsklassengruppen Γ_Q zeigt (vgl. Satz 3.1.2, auf die masbaumschen

Gruppen $\tilde{\Gamma}_\sigma$ übertragen werden. In der Tat stabilisiert sich auch hier die Homologie, allerdings erst deutlich später.

Wähle zwei feste Flächen $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2$ mit Rand und Spinstrukturen $\sigma = \sigma_1, \sigma_2$. In Σ_i sei je eine Randkomponente $\partial_i: S^1 \rightarrow \Sigma_i$ ausgezeichnet, und es sei $\sigma_1(\partial_1) = \sigma_2(\partial_2)$. Versieht man die Flächen Σ_i mit Kragen, dann definiert $\Sigma' := \Sigma_1 \cup_{S^1} \Sigma_2 := \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 / (\partial_1(x) \sim \partial_2(x))$ wieder eine differenzierbare Fläche, deren Tangentialbündel sich passend einschränkt: $T\Sigma_i = T\Sigma'|_{\Sigma_i}$. Daher erhält man eine eindeutig definierte Spinstruktur σ' , die auf Σ_i eingeschränkt mit σ_i übereinstimmt.

Ist auf $S\Gamma\Sigma$ ein Grundpunkt (p_0, v_0) festgehalten, und interpretiert man diesen Punkt auch als den Grundpunkt von $S\Gamma\Sigma'$, so ergeben sich durch Fortsetzung eines Diffeomorphismus durch die Identität kanonische Abbildungen $\Gamma(\Sigma) \rightarrow \Gamma(\Sigma')$ und ebenso für die Gruppen Γ^1, Γ_σ und Γ_σ^1 . Insbesondere kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(S\Gamma\Sigma) & \longrightarrow & \Gamma^1(\Sigma) & \longrightarrow & \Gamma(\Sigma) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(S\Gamma\Sigma') & \longrightarrow & \Gamma^1(\Sigma') & \longrightarrow & \Gamma(\Sigma') \longrightarrow 1, \end{array}$$

wobei α der durch die Inklusion $S\Gamma\Sigma \hookrightarrow S\Gamma\Sigma'$ induzierte Morphismus ist. Da $\sigma' \circ \alpha = \sigma$, gibt es wegen der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccccc} K_\sigma & \longrightarrow & \Gamma_\sigma^1(\Sigma) & \longrightarrow & \Gamma_\sigma(\Sigma) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K'_\sigma & \longrightarrow & \Gamma_{\sigma'}^1(\Sigma') & \longrightarrow & \Gamma_{\sigma'}(\Sigma') \end{array}$$

einen Morphismus der kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & Z_2 = \{\text{id}, \delta\} & \longrightarrow & \tilde{\Gamma}_\sigma(\Sigma) & \longrightarrow & \Gamma_\sigma(\Sigma) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 1 & \longrightarrow & Z_2 = \{\text{id}, \delta\} & \longrightarrow & \tilde{\Gamma}_{\sigma'}(\Sigma') & \longrightarrow & \Gamma_{\sigma'}(\Sigma') \longrightarrow 1 \end{array}$$

KOROLLAR 3.2.1. Sei $g = \text{genus}(\Sigma)$. Falls $g \geq 2k^2 + 6k + 3$ oder $g \geq 2k^2 + 6k - 2$ und Σ_2 mindestens zwei Randkomponenten hat, so ist

$$\beta_*: H_k(\tilde{\Gamma}_\sigma(\Sigma)) \rightarrow H_k(\tilde{\Gamma}_{\sigma'}(\Sigma'))$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Aus der Natürlichkeit der Serre-Spektralsequenz folgt, dass es einen Morphismus γ^* zwischen den Spektralsequenzen

$$E_{*,*}^2 = H_*(\Gamma_\sigma(\Sigma); H_*(Z_{\frac{1}{2}})) \Rightarrow H_*(\tilde{\Gamma}_\sigma(\Sigma))$$

und

$$E'_{*,*}^2 = H_*(\Gamma_{\sigma'}(\Sigma'); H_*(Z_{\frac{1}{2}})) \Rightarrow H_*(\tilde{\Gamma}_{\sigma'}(\Sigma'))$$

gibt, der im E^2 -Term gegeben ist durch:

$$\gamma_* = \gamma^2: H_s(\Gamma_\sigma(\Sigma; G)) \longrightarrow H_s(\Gamma_{\sigma'}(\Sigma'; G)),$$

wobei $G = H_t(Z_{\frac{1}{2}})$. Sei $l = 2$ im Fall, dass Σ_2 mindestens zwei Randkomponenten hat, ansonsten $l = 7$. Nach Korollar 3.1.2 und Korollar 3.1.4 ist γ ein Isomorphismus für $g \geq 4s + l$.

Behauptung: $\gamma_{s,t}^r$ ist ein Isomorphismus zwischen $E_{s,t}^r$ und $E'^r_{s,t}$ für $g \geq 4s + 2r(r-1) + l - 4$.

In der Tat ist die Behauptung richtig für $r = 2$, denn dann ist $g \geq 4s + l$. In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(d_{s,t}^r) & \longrightarrow & E_{s,t}^r & \xrightarrow{d} & \text{im}(d) \subseteq E_{s+r,t-r+1}^r \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma_{s,t}^r & & \downarrow \gamma_{s,t}^r & & \downarrow \gamma_{s+r,t-r+1}^r \\ 0 & \longrightarrow & \ker(d'^r_{s,t}) & \longrightarrow & E'^r_{s,t} & \xrightarrow{d'} & \text{im}(d') \subseteq E'^r_{s+r,t-r+1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

sind die senkrechten Pfeile Isomorphismen, falls

$$\gamma_{s,t}^r: E_{s,t}^r \longrightarrow E'^r_{s,t} \quad \text{und} \quad \gamma_{s+r,t-r+1}^r: E_{s+r,t-r+1}^r \longrightarrow E'^r_{s+r,t-r+1}$$

Isomorphismen sind.

Nun ergibt sich γ^{r+1} aus der Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(d_{s,t}^r) & \longrightarrow & \text{im}(d_{s+r,t-r+1}^r) & \longrightarrow & E_{s,t}^{r+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma^r & & \downarrow \gamma^r & & \downarrow \gamma^{r+1} \\ 0 & \longrightarrow & \ker(d'^r_{s,t}) & \longrightarrow & \text{im}(d'^r_{s+r,t-r+1}) & \longrightarrow & E'^{r+1}_{s,t} \longrightarrow 0. \end{array}$$

$\gamma_{s,t}^{r+1}$ ist nach dem Fünferlemma ein Isomorphismus, falls $\gamma_{s,t}^r$ und $\gamma_{s+r,t-r+1}^r$ Isomorphismen sind, also falls (induktiv)

1. $g \geq 4s + 4r(r-1) + l - 4$ und
2. $g \geq 4(s+r) + 2r(r-1) + l - 4 = 4s + 2(r+1)r + l - 4$

Die erste Bedingung folgt offenbar aus der zweiten; und die zweite ist nach Voraussetzung erfüllt.

Da sich die Spektralsequenzen auf den ersten Quadranten beschränken, gilt $E_{s,t}^\infty = E_{s,t}^{s+t+2}$ und $\gamma_{s,t}^\infty = \gamma_{s,t}^{s+t+2}$. Da die Filtrierungsquotienten für $H_k(\tilde{\Gamma}_\sigma(\Sigma))$ die $E_{s,t}^\infty$ mit $s+t=k$ sind, ist also nur zu zeigen, dass alle $\gamma_{s,t}^r$ mit $r \leq s+t+1$ Isomorphismen sind für $g \geq 2k^2 + 6k + l - 4$. Aber

$\gamma_{s,t}^2, \dots, \gamma_{s,t}^{s+t+1}$ sind isomorph, falls $g \geq 4s + 2(s+t+1)(s+t) + l - 4$, und letzteres ist kleiner als $2(s+t)^2 + 6(s+t) + l - 4$. \square

KAPITEL 4

Die unendliche Schleifenraumstruktur der Spin-AKG

In diesem Kapitel werde ich Tillmanns Methoden aus [Til97b] auf die zwei Arten von Spin-Abbildungsklassengruppen anwenden, die in Kapitel 1 definiert wurden. Das Ergebnis ist eine unendliche Schleifenraumstruktur auf dem klassifizierenden Raum einer stabilisierten Version dieser Gruppen, nachdem man die Quillensche +-Konstruktion darauf angewandt hat. Die Hauptzutaten für den Beweis sind Harers Stabilisierungssatz für Spin-Abbildungsklassengruppen [Har90] in der Form von Satz 3.1.2 bzw. im Fall der masbaumschen Gruppen das Korollar 3.2.1. Zunächst konstruiere ich eine recht einfache monoidale Spinflächen-2-Kategorie, auf die dann die von May [May72], Segal [Seg74], Boardman, Vogt und Adams [Ada78] entwickelte Maschinerie angewendet wird, die daraus einen unendlichen Schleifenraum konstruiert. Mit Hilfe eines verallgemeinerten Gruppenvervollständigungssatzes nach Moerdijk [Moe89] und Tillmann [Til97b] analysiere ich diesen Schleifenraum und erkenne ihn als homologieäquivalent zu Γ_∞ , einer stabilisierten Version der Spin-Abbildungsklassengruppen.

4.1. Bordismenkategorien

In diesem Kapitel wird eine (strikte) symmetrisch-monoidale 2-Kategorie \mathcal{S} von Spinbordismen definiert und deren Homotopie untersucht. Für die mit höheren Kategorien verwandten Begriffe verweise ich auf Anhang A. Die Objekte dieser Kategorie sind geschlossene, kompakte 1-Mannigfaltigkeiten bzw. Repräsentanten jedes solchen Diffeomorphismentyps, mit anderen Worten, die disjunkte Vereinigung von n S^1 -en für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Die Morphismen sind kompakte Spinflächen einer ausgezeichneten Teilmenge von Randkomponenten, nämlich den einlaufenden, und mit einer Spinstruktur. 2-Morphismen sind Diffeomorphismen dieser Flächen. Die disjunkte Vereinigung definiert dann eine strikt assoziative, symmetrische Struktur auf \mathcal{S} . Schließlich wird der klassifizierende Raum dieser Kategorie mit dem klassifizierenden Raum der Spin-Abbildungsklassengruppen in Verbindung gebracht. Da dies das Hauptziel ist, müssen wir nicht unbedingt versuchen, die Kategorie so groß zu machen, dass alle möglichen Spinflächen vorkommen;

im Gegenteil werden die folgenden Betrachtungen stark vereinfacht, wenn man nur eine sehr kleine Teilkategorie aller Spinbordismen betrachtet. Zum Beispiel wird jede Spinfläche in \mathcal{S} die Arf-Invariante 0 haben.

4.1.1. Definition der Bordismenkategorie \mathcal{S} . Die Kategorie, der eigentlich das Hauptinteresse gelten sollte, ist die (große) 2-Kategorie σ -Bord aller Spinbordismen und Isomorphismen:

Die Kategorie σ -Bord besteht aus:

- *Objekte*: alle geschlossenen kompakten 1-Mannigfaltigkeiten;
- *1-Morphismen*: Spin-Bordismen zwischen 1-Mannigfaltigkeiten, d.h. Spinflächen F , deren Spinform auf den Rändern 0 ist, zusammen mit zwei disjunkten Einbettungen $s: \text{source}(F) \hookrightarrow F$, $t: \text{target}(F) \hookrightarrow F$ mit $\text{im}(s) \cup \text{im}(t) = \partial F$;
- *2-Morphismen*: nur Isomorphismen, nämlich Spin-Abbildungsklassen, entweder nach herkömmlicher oder nach masbaumscher Definition (Γ_σ bzw. $\tilde{\Gamma}_\sigma$).

Verkettung von 2-Morphismen geschieht durch Verkettung der Isomorphismen, Verkettung von 1-Morphismen durch Verkleben der Flächen entlang der durch s bzw. t spezifizierten Kragenkomponenten.

Allerdings ist es zu optimistisch, zu glauben, dass man mit dieser Kategorie angenehm arbeiten könne. Zunächst gibt es das Problem, dass die 1-Morphismen zwischen zwei Objekten nicht ohne weiteres eine Menge bilden, wie das in der hier verwendeten Definition gefordert wird. Dieses Problem kann man umschiffen, indem man nur in \mathbf{R}^N eingebettete Flächen betrachtet. Dann allerdings ist überhaupt nicht klar, wie man aus zwei eingebetteten Flächen durch Verkleben auf so kanonische Weise wieder eine eingebettete Fläche erhält, dass die 2-Kategorien-Strukturdiagramme alle kommutieren. Außerdem ist es das Ziel, auf einer solchen Bordismenkategorie eine symmetrisch-monoidale Struktur durch disjunkte Vereinigung zu definieren. Auch hier bekommt man große Kohärenzprobleme. Es ist daher viel sinnvoller, eine kleinere und vielleicht nicht so kanonisch erscheinende Kategorie von Spinflächen zu verwenden. Tillmann [Til97a] konstruiert eine solche Kategorie, die sie in [Til97b] für den Beweis des Schleifenraumsatzes für Abbildungsklassengruppen verwendet. Es ist jedoch möglich, die Kategorie noch etwas einfacher zu wählen, auch im Fall von Spinbordismen.

DEFINITION. Es sei M_0 die Menge, die die folgenden Elemente aus σ -Bord enthält, mit wie folgt definierten Abbildungen $s, t: M_0 \rightarrow N_0$:

1. eine Scheibe $D = \bigcirc_0^1$, $s(D) = 0$, $t(D) = 1$,

2. eine Hose $P = \begin{array}{c} 0 \\ \text{---} \\ 0 \end{array}$ mit Spinstruktur = 0 auf den Rändern, $s(P) = 2$, $t(P) = 1$,

3. ein Torus $T = \begin{array}{c} 0 \\ \text{---} \\ a \\ \text{---} \\ b \\ \text{---} \\ 0 \end{array}$ für die Spinstruktur, die überall 0 außer auf $a + b$ wird, $s(T_i) = 1$, $t(T_i) = 1$,

4. ein Element id , $s(\text{id}) = 1$, $t(\text{id}) = 1$.

Daraus wird eine Menge M_1 konstruiert, deren Elemente endliche Folgen (x_1, x_2, \dots, x_n) von Elementen in M_0 sind mit $n \in N_0$. Die Abbildungen s, t werden auf M_1 fortgesetzt durch $s(x_1, \dots, x_n) := s(x_1) + \dots + s(x_n)$, genauso für t .

Nun definiere

$$M_2 := \{(x_1, \dots, x_n) \in M_1^n \mid \text{für alle } i < n \text{ ist } t(x_i) = s(x_{i+1})\},$$

was nun zu einer Menge mit zwei Kompositionsoperationen, einer davon partiell, wird. Dazu seien $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_{11}, \dots, x_{1i_1}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{ni_n})$ und $y = (y_1, \dots, y_m) = (y_{11}, \dots, y_{1j_1}, \dots, y_{m1}, \dots, y_{mj_m}) \in M_2$.

1. Ist $t(x_n) = s(y_1)$, so sei $y \circ x := (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$;

2. Ist $n <= m$, so sei

$$x \sqcup y := \left(\begin{array}{cccccc} x_{11}, & \dots, & x_{1i_1}, & y_{11}, & \dots, & y_{1j_1}, \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}, & \dots, & x_{ni_n}, & y_{n1}, & \dots, & y_{nj_n}, \\ y_{(n+1)1}, & \dots, & y_{(n+1)j_{n+1}}, & \text{id}, & \dots, & \text{id}, \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1}, & \dots, & y_{mj_m}, & \text{id}, & \dots, & \text{id}, \end{array} \right)$$

und für $n >= m$ entsprechend.

Nun sei auf M_2 eine Relation \sim definiert, die folgende Elemente enthält:

1. $(\text{id}, D) \sim (D)$,
2. $((\text{id}, \text{id}), P) \sim (P, \text{id})$,
3. $(\text{id}, T) \sim (T, \text{id})$,
4. $((\text{id}, \dots, \text{id})) \sim ()$

und abgeschlossen unter Verknüpfung mit beliebigen Elementen auf M_2 unter \circ und \sqcup ist.

Damit wäre $(M_2 / \sim, \circ, \sqcup)$ schon eine monoidale Kategorie, aber zunächst wird sie noch so erweitert, dass \sqcup symmetrisch wird.

Zunächst bemerken wir, dass es zu jedem $n \in t(x)$ für $x \in M_2/\sim$ eine eindeutig definierte Teilmenge $L_x(n) \subset \{1, \dots, s(x)\}$ gibt mit den Eigenschaften

1. $L_x(1) = \{1, \dots, s(x)\}$ für $x = D, P, T$,
2. $L_{y \circ x}(n) = L_x(L_y(n))$,
3. $L_{x \sqcup y}(n) = L_x(n)$, falls $n \leq t(x)$,
4. $L_{x \sqcup y}(n) = L_y(n - t(x)) + s(x)$, falls $n > t(x)$.

Dazu sei $M_3 := \{(\sigma, x) \mid x \in M_2/\sim \text{ und } \sigma \in \mathfrak{S}_{s(x)}\}$, mit anderen Worten die Elemente x von M_2/\sim zusammen mit einer Nummerierung der Elemente von $s(x)$. Nun definiere auf $\{x \in M_2/\sim \mid t(x) = n\}$ eine Operation der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_n durch vertauschen der \circ -Komponenten und definiere für $(\sigma, x), (\tau, y) \in M_3$ mit $t(x) = s(y)$: $y \circ x = (\tau^{L_x} \circ \sigma, y \circ \tau.x)$, wobei τ^{L_x} die Blockpermutation in $\mathfrak{S}_{s(x)}$ ist, die die Blöcke $L_x(i)$ vertauscht.

Zu jedem Element $x \in M_3$ gibt es eine Fläche $F(x) \in \underline{\sigma\text{-Bord}}$, so dass $F(x \circ y)$ isomorph zu der Verklebung und $F(x \sqcup y)$ zu der disjunkten Vereinigung von $F(x)$ und $F(y)$ ist und $F(x)$ isomorph zu den oben abgebildeten Modellen ist. Die Spin-Bordimenkategorie \mathcal{S} ist definiert als die folgende Kategorie: die Objekte sind in N_0 , die 1-Morphismen sind aus M_3 , die 2-Morphismen zwischen A und B jedoch sind 2-Morphismen zwischen $F(A)$ und $F(B)$. Alternativ kann man sagen, dass \mathcal{S} die volle 2-Unterkategorie ist, die vom Bild von F erzeugt wird (voll auf 2-Morphismen), denn F ist injektiv.

LEMMA 4.1.1. *\mathcal{S} ist eine symmetrisch-monoidale 2-Kategorie mit der monoidalen Verknüpfung \sqcup .*

Beweis: Nachzuprüfen ist die Assoziativität von \circ und \sqcup , was Routine ist. Die natürliche Symmetrietransformation ist

$$s(x, y) = (\mathfrak{S}_2^{\{1, \dots, s(x)\}, \{s(x)+1, \dots, s(x)+s(y)\}}, \text{id}^{s(x)+s(y)}).$$

□

4.2. Die Homotopie von \mathcal{S} und den Spin-Abbildungsklassengruppen

Sei \mathcal{S}_1 der 1-Nerv der Kategorie \mathcal{S} , d.h. mit gleichen Objekten, die Morphismen zwischen m und n werden aber ausgetauscht gegen den klassifizierenden Raum der Kategorie $\mathcal{S}(m, n)$. \mathcal{S}_1 ist also eine über den simplizialen Mengen angereicherte Kategorie. In \mathcal{S} gibt es viele verschiedene 1-Morphismen von m nach n , entsprechend unterschiedlichen Geschlechtern, Spinstrukturen, Komponentenzahlen und, vor allem, *verschiedenen Konstruktionen* isomorpher Flächen. Betrachten wir die Morphismenmenge $\mathcal{S}_1(m, n)$, so zerfällt sie in recht viele Zusammenhangskomponenten, weil es

so wenige 2-Morphismen gibt. Diese sind alle wesentlich, und hier kann man nicht vereinfachen; innerhalb einer Zusammenhangskomponente kann man jedoch zu dem klassifizierenden Raum eines Skelettes übergehen. Zwischen Σ_1 und $\Sigma_2 \in \mathcal{S}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ gibt es genau dann einen Isomorphismus, wenn diese beiden Flächen isomorph als Spinflächen sind, d.h., wenn es eine Bijektion $\phi: \pi_0 \Sigma_1 \xrightarrow{\cong} \pi_0 \Sigma_2$ gibt, so dass für jede Zusammenhangskomponente $C \subseteq \Sigma_1$ C und $\phi(C)$ das gleiche Geschlecht haben. Das heißt:

(4.2.1)

$$\mathcal{S}_1(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \simeq \coprod_{k \in \mathbb{N}_0} \coprod_{(\mathfrak{m}_j, \mathfrak{n}_j) \in I_k} \coprod_{g_1, \dots, g_k \in \mathbb{N}_0} (B\Gamma_{g_1, m_1 + n_1} \sqcup \dots \sqcup B\Gamma_{g_k, m_k + n_k})$$

wobei $(\mathfrak{m}_j, \mathfrak{n}_j)$ durch alle k -Partitionen von \mathfrak{m} und \mathfrak{n} laufen:

$$I_k = \left\{ (\mathfrak{m}_j, \mathfrak{n}_j) \in \mathbb{N}_0^k \times \mathbb{N}_0^k \mid \begin{array}{l} \sum_j \mathfrak{m}_j = \mathfrak{m}, \sum_j \mathfrak{n}_j = \mathfrak{n}, \text{ alle } \mathfrak{m}_j \geq 0 \\ \text{und alle } \mathfrak{n}_j \geq 1. \end{array} \right\}$$

Insbesondere ist

$$(4.2.2) \quad \mathcal{S}_1(\mathfrak{m}, 1) \simeq \coprod_{g \in \mathbb{N}_0} B\Gamma_{g, m+1},$$

denn ein Bordismus von \mathfrak{m} Kopien von S^1 zu einer S^1 ist automatisch zusammenhängend und bis auf Diffeomorphie eindeutig durch sein Geschlecht klassifiziert. Nach Lemma 4.1.1 ist \mathcal{S} eine symmetrisch-monoidale 2-Kategorie. Nach Lemma B.1.3 erbt \mathcal{S}_1 diese Struktur und wird zu einer simplizialen symmetrisch-monoidalen Kategorie. Wir wenden nun den Nervfunktor ein weiteres Mal auf \mathcal{S}_1 an und erhalten die bisimpliziale Menge \mathcal{NS} . \mathcal{NS} ist zusammenhängend, da das Objekt $0 \in \mathcal{S}_1$ schwach initial ist: zu jedem $\mathfrak{n} \in \mathcal{S}_1$ gibt es einen Morphismus $0 \rightarrow \mathfrak{n}$, zum Beispiel \mathfrak{n} disjunkte Kappen. Man beachte, dass 0 kein echt initiales Objekt ist, weil es mehr als einen Morphismus von 0 nach \mathfrak{n} gibt; z.B. könnte der Bordismus positives Geschlecht haben. Daher ist es auch nicht wahr, dass \mathcal{S}_1 zusammenziehbar ist. 0 ist übrigens auch das einzige solche schwach-initiale Objekt: von jedem anderen Objekt gibt es keinen Morphismus *in die* 0 . Mit Proposition C.0.1 erhält man somit unmittelbar

KOROLLAR 4.2.3. *\mathcal{NS} ist ein unendlicher Schleifenraum.*

\mathcal{NS} ist eine bisimpliziale Menge, in die alle Information der klassifizierenden Räume der Spin-Abbildungsklassengruppen aller möglicher Flächen geflossen ist, es ist jedoch nicht offensichtlich, wie man diese Information aus

der schlichten bisimplizialen Menge wiedergewinnen kann. Daher bleibt als Aufgabe noch, das Ergebnis der obigen Konstruktionen und Berechnungen zu analysieren: gibt es eine einfache Interpretation von \mathcal{NS} , etwa eine übersichtliche Beziehung zu einer geeigneten „Stabilisierung“ der Spin-Abbildungsklassengruppen?

DEFINITION. Die **stabile Spin-Abbildungsklassengruppe** $\Gamma_{\infty,n+1}$ ist definiert als der direkte Limes

$$(4.2.4) \quad \Gamma_{\infty,n+1} := \varinjlim \left\{ \Gamma_{\sigma,0,n+1} \xrightarrow{t_0} \Gamma_{\sigma,1,n+1} \xrightarrow{t_1} \Gamma_{\sigma,2,n+1} \xrightarrow{t_2} \dots \right\},$$

wobei die Abbildungen t_i durch die Anheftung eines fest gewählten Torus $\Sigma_{1,2}$ mit zwei Randkomponenten und der gleichen Spinstruktur wie die Tori in der Definition von $\mathcal{S}(1,1)$. Wiederum verwenden wir eine einheitliche Notation für die herkömmlichen und die masbaumschen Gruppen; beide sind erlaubt.

SATZ 4.2.5. *Sei $\Gamma_{\infty,1}$ die oben definierte stabile Spin-Abbildungsklassengruppe mit einer Randkomponente. Dann gibt es eine Homologieäquivalenz*

$$H_*(\Omega(\mathcal{NS})) \cong H_*(B\Gamma_{\infty,1} \times \mathbf{Z}).$$

Somit hat also $\Gamma_{\infty,1}$ die Homologie eines unendlichen Schleifenraums.

Der Beweis verläuft analog zu Tillmanns Beweis [Til97b] im Fall ohne Spinstrukturen und folgt aus einem verallgemeinerten Gruppenvervollständigungssatz. Der klassische Gruppenvervollständigungssatz besagt das folgende:

Sei G ein simpliziales Monoid, das simplizial auf einem Raum X operiert, so dass für jedes $g \in G$

$$h_*(g): h_*X \longrightarrow h_*X$$

ein Isomorphismus für irgendeine gewählte Homologietheorie h ist. Dann ist die Inklusion einer Faser in die Homotopiefaser F der Abbildung $EG \times_G X \longrightarrow BG$ ebenfalls ein h_* -Isomorphismus.

Der Leser mag sich mit Recht fragen, wieso dieser Satz den Namen „Gruppenvervollständigungssatz“ trägt. Um dies zu illustrieren, sei $\pi_0(G)$ zentral in dem Pontrjaginring $H_*(G)$. Wir wählen ein direktes System $(G_i)_{i \in I}$, wo jedes $G_i = G$ und als Abbildung jede Multiplikation mit jedem Element von $\pi_0(G)$ unendlich oft vorkommt. $G_\infty := \varinjlim(G_i)$ bezeichne den Homotopielimes; dann ist $H_*(G_\infty) = \varinjlim H_*(G_i) = H_*(G)[\pi_0(G)^{-1}]$. Wenn wir jetzt die Operation von G auf G_∞ von links betrachten, so ist dies eine H_* -Äquivalenz. $EG \times_G X_\infty$ ist ein Homotopielimes von zusammenziehbaren Räumen $EG \times_G G$ und daher zusammenziehbar; daher ist die Homotopiefaser ΩBG .

Also erhalten wir einen Isomorphismus $H_*(\Omega BG) \cong H_*(G)[\pi_0(G)^{-1}]$. Daher nennt man ΩBG oft Gruppenvervollständigung von G .

Wir benötigen eine Verallgemeinerung auf Operationen von Kategorien auf Mengen.

DEFINITION. Sei $C \in \underline{\text{cat}}$ und $X = (X_i)_{i \in \text{ob}(C)}$ eine durch die Objektmenge von C parametrisierte Familie von Mengen oder Objekten in irgendeiner Kategorie \mathcal{D} , die ein terminales Objekt $*$ besitzt. Eine **Operation von C auf X** ist eine Kollektion von Abbildungen $\rho_{ij}: X_i \rightarrow X_j$, wobei $i, j \in C$ alle Objekte von C durchlaufen, und zwar so, dass

1. $\rho_{ii}(\text{id}_i) = \text{id}_{X_i}$
2. $\rho_{jk}(g)\rho_{ij}(f) = \rho_{ik}(g \circ f)$

X heißt dann auch **C -Diagramm**.

- Man kann auch sagen, dass eine Operation von C einfach ein Funktor $\rho: C \rightarrow \mathcal{D}$ ist. Damit erwähnt man allerdings nicht die Familie (X_i) , die sich als $\rho(i)$, $i \in C$ rekonstruiert.
- Falls C nur ein Objekt besitzt, ist eine Operation von C gerade eine Monoidoperation.

DEFINITION. Die **Translationskategorie** $\mathcal{E}\rho$ einer C -Operation ρ auf X ist definiert als die folgende Kategorie:

1. Die Objekte sind Paare (i, x) , wobei $i \in \text{ob}(C)$ und $x \in D(*, X_i)$ (dies ist natürlich nur die objektfreie Version von „ $x \in X_i$ “),
2. Die Morphismen von (i, x) nach (j, y) sind diejenigen $f \in C(i, j)$, für die $\rho_{ij}(f) \circ x = y$.

C operiert auf der Translationskategorie $\mathcal{E}\rho$ durch $\rho'_{ij}(f)(i, x) = (j, \rho_{ij}(f) \circ x)$. Der Funktor $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \rho C$, definiert durch Projektion auf den ersten Faktor, ist C -äquivariant.

BEISPIEL 4.2.6. Ist G ein Monoid, so operiert G auf sich durch Linksmultiplikation. Die zugehörige Translationskategorie ist die Kategorie aller $g \in G$; die Morphismen von g nach h sind wiederum das Monoid G . G operiert darauf durch $x \cdot g = xg$.

Nun nehmen wir an, dass C eine *simpliziale Kategorie* ist, so wie \mathcal{S}_1 , und \mathcal{D} eine Kategorie von simplizialen Objekten in einer anderen Kategorie. Die Morphismenmengen einer simplizialen Kategorie (einer Kategorie angereichert über $\Delta \underline{\text{Ens}}$) tragen nach Definition die Struktur einer simplizialen Menge, so dass die Komposition eine simpliziale Abbildung ist. (Dies ist ein Spezialfall eines Kategorieobjekts in $\Delta \underline{\text{Ens}}$, für das die Objektmenge diskret ist. Ohne diese Einschränkung wäre ein Kategorieobjekt in $\Delta \underline{\text{Ens}}$ ein Paar simplizialer Mengen, die Objekte und die Morphismen, so dass die Strukturbildungen (source, target, Komposition) simplizial sind.)

In diesem Kontext ist nun $\mathcal{E}\rho$ ebenfalls eine simpliziale Kategorie, und die Projektion π liefert eine Abbildung bisimplizialer Mengen

$$\mathcal{N}\pi: \mathcal{N}\mathcal{E}\rho \rightarrow \mathcal{N}C.$$

Die Kategorie der bisimplizialen Mengen trägt nach Moerdijk [Moe89] die Struktur einer Modellkategorie, wenn man folgende Definitionen macht:

- Die schwachen Äquivalenzen bzw. Faserungen sind bisimpliziale Abbildungen f , so dass $\text{diag}(f)$ eine schwache Äquivalenz bzw. Faserung ist;
- die Kofaserungen sind solche Abbildungen, die die Linkshochhebungseigenschaft für triviale Faserungen haben (dieser Punkt ist natürlich redundant, er folgt aus dem ersten mit den Modellkategorieaxiomen)

Daher können wir nach der Homotopiefaser der Abbildung $\mathcal{N}\pi$ fragen; die Homotopiefaser einer Abbildung $p: E \rightarrow B$ bisimplizialer Mengen (oder generell in irgendeiner Modellkategorie) ist wie folgt definiert:

Man nehme einen Punkt (ein $(0,0)$ -Prisma) x von B und faktorisiere die Inklusion $\{*\} \xhookrightarrow{x} B$ in eine triviale Kofaserung und eine Faserung:

$$\{*\} \xrightarrow[\cong]{j} P(B) \xrightarrow{q} B.$$

Die Notation suggeriert, dass $P(B)$ mit dem Wegeraum von B zusammenhängt. Die Homotopiefaser von p ist dann der mittlere Pullback in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} p^{-1}(\{*\}) & \xrightarrow{\tilde{j}} & \text{hofib}(p) = P(B) \times_B E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ \{*\} & \xrightarrow[\cong]{j} & P(B) & \xrightarrow{q} & B. \end{array}$$

Man beachte, dass $P(B)$ in der Tat bis auf schwache Äquivalenz wohldefiniert ist, dies folgt aus den Modellkategorieaxiomen: Ist nämlich $P'(B)$ ein weiterer Raum mit der gleichen Eigenschaft, so existieren in

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{\cong} & P(B) \\ \cong \downarrow j' & \nearrow & \downarrow \\ P'(B) & \longrightarrow & B, \end{array}$$

die diagonalen Pfeile wegen (CM4), und sie sind schwache Äquivalenzen wegen (CM2) (vgl. [Qui67, Jar98]).

Im Allgemeinen können wir freilich nicht annehmen, dass $\text{hofib}(\mathcal{N}\pi)$ viel mit den wirklichen Fasern von π zu tun hat, einfach weil letztere sehr verschieden

voneinander aussehen können. Deshalb setzen wir wie oben an und wählen eine Homologietheorie h_* , so dass die Operation von C h_* -Isomorphismen induziert. Der folgende Satz, der verallgemeinerte Gruppenvervollständigungssatz, besagt dann, dass auch jede Faser h_* -isomorph zu der Homotopiefaser $hofib(\mathcal{N}\pi)$ ist. Wir wollen den Funktor h_* als auf topologischen Räumen definiert verstehen, und für n -simpliziale Mengen X schreiben wir $h_*(X)$ für $h_*(|X|)$. Die Eigenschaften, die der Funktor h_* auf bisimplizialen Mengen erfüllen muss, sind nicht die einer Homologietheorie, sondern lediglich folgende:

1. h_* -Isomorphismen werden unter Pushouts erhalten und
2. ist $f: X \rightarrow Y$ eine bisimpliziale Abbildung, so dass alle monosimplizialen Abbildungen $f_n: X_n \rightarrow Y_n$, $n \in N_0$ einen h_* -Isomorphismus induzieren, so induziert auch $diag(f)$ einen h_* -Isomorphismus.

Bevor diese Eigenschaften weiter studiert werden, zunächst der Satz:

SATZ 4.2.7. *Sei ρ eine Operation einer simplizialen Kategorie C auf simplizialen Mengen $(X_i) \subseteq \Delta \underline{Ens}$ mit Projektion π . Für jedes 0-Simplex $\alpha \in C(i,j)$, für alle $i, j \in ob(C)$, induziere*

$$\rho(\alpha): \rho(\text{source } \alpha) \rightarrow \rho(\text{target } \alpha)$$

einen h_ -Isomorphismus auf den Nerven für einen Funktor h_* , der (1) und (2) erfüllt. Dann ist das Diagramm bisimplizialer Mengen*

$$\begin{array}{ccc} \text{const}(\rho(x)) & \xhookrightarrow{\quad} & \mathcal{N} \mathcal{E} \rho \\ \downarrow & & \downarrow \mathcal{N} \pi \\ * & \xrightarrow[x]{\quad} & \mathcal{N} C \end{array}$$

ein h_ -Pullbackdiagramm, d.h. $\rho(x)$ ist h_* -äquivalent zu der Homotopiefaser von $\mathcal{N}\pi$.*

Beweis (nach Moerdijk [Moe89]): Der Beweis benutzt Techniken der homotopischen Algebra und die Modellkategoriestrukturen von $\Delta \underline{Ens}$ und $\Delta^2 \underline{Ens}$. Abkürzend schreiben wir $E = \mathcal{N} \mathcal{E} \rho$, $B = \mathcal{N} C$, $p = \mathcal{N} \pi$.

Zunächst brauchen wir ein Hilfslemma:

LEMMA 4.2.8 (Moerdijk [Moe89]). *Jede triviale Kofaserung $c: X \rightarrow Y$ in $\Delta^2 \underline{Ens}$ ist ein direkter Limes einer Folge von Kofaserungen*

$$X = X_0 \xrightarrow{u_0} X_1 \xrightarrow{u_1} \cdots \rightarrow Y,$$

wobei jede Abbildung u_i durch ein Pushoutdiagramm definiert ist:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_i \Lambda_n^k & \longrightarrow & \coprod_i \Delta_{(n,n)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_i & \xrightarrow{u_i} & X_{i+1}. \end{array}$$

Dabei ist die bisimpliziale Menge $\Lambda_n^k := \bigcup_{j \neq k} (\partial_j \times \partial_j)^{-1} \Delta_{(n-1,n-1)}$ das „k-te Horn“.

Wir wenden dieses Lemma auf die triviale Kofaserung $j: * \rightarrow P(B)$ an:

$$j = \varinjlim_i \{u_i: X_i \rightarrow X_{i+1}\}.$$

Pullbacks kommutieren mit direkten Limiten, also gilt:

$$x^*(p) = \varinjlim (u_i^*(X_{i+1} \rightarrow B))^* p.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass jedes u_i einen h_* -Isomorphismus induziert. Nach (1) erhalten Pushouts h_* -Isomorphismen, daher genügt es zu zeigen, dass in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} u^* \sigma^* E & \xrightarrow{\tilde{u}} & \sigma^* E & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & E \\ u^* \sigma^* p \downarrow & & \sigma^* p \downarrow & & \downarrow p \\ \Lambda_n^k & \xrightarrow{u} & \Delta_{(n,n)} & \xrightarrow{\sigma} & B, \end{array}$$

\tilde{u} einen h_* -Isomorphismus induziert.

Wir können die Abbildung $\sigma: \Delta_{(n,n)} \rightarrow B$ explizit als eine Kette

$$B_0 \xrightarrow{\sigma_0} B_1 \xrightarrow{\sigma_1} \dots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} B_n$$

schreiben, wobei jedes $B_i \in B(n)$.

Dann ist $\sigma^* E$ die bisimpliziale Menge

$$\begin{aligned} (\sigma^* E)(p, q) &= (\Delta_{(n,n)} \times_B E)(p, q) \\ &= \left\{ (\alpha, \beta, e) \mid [p] \xrightarrow{\alpha} [n], [q] \xrightarrow{\beta} [n], e \in \rho(B_{\alpha(0)})(q) \right\}. \end{aligned}$$

Genaugenommen sollte e eine p -Kette verkettbarer Pfeile

$$\rho(\alpha(0))(q) \rightarrow \dots \rho(\alpha(p))(q)$$

sein, aber da in diesem Fall die Morphismen in E genau die Morphismen in B sind, ist diese Kette wohldefiniert, wenn wir nur einen Punkt $e \in \rho(\alpha(0))(q)$ spezifizieren. Genauso ist

$$(u^* \sigma^* E)(p, q) = \left\{ (\alpha, \beta, e) \mid [p] \xrightarrow{\alpha} \partial_i[n], [q] \xrightarrow{\beta} \partial_j[n], \text{ wobei } i, j \neq k \right. \\ \left. \text{und } e \in \rho(B_{\alpha(0)})(q). \right\}$$

Wir vergleichen diese beiden bisimplizialen Mengen mit den folgenden, einfacheren:

$$\begin{aligned}\overline{(\sigma^* E)}(p, q) &:= (\Delta_{(n,n)} \times \text{const}(\rho(B_0))) (p, q) \\ &= \left\{ (\alpha, \beta, e) \mid [p] \xrightarrow{\alpha} [n], [q] \xrightarrow{\beta} [n], e \in \rho(B_0)(q). \right\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\overline{(u^* \sigma^* E)}(p, q) &:= (A_n^k \times \text{const}(\rho(B_0))) (p, q) \\ &= \left\{ (\alpha, \beta, e) \mid [p] \xrightarrow{\alpha} \partial_i[n], [q] \xrightarrow{\beta} \partial_j[n], e \in \rho(B_0)(q). \right\}\end{aligned}$$

Es gibt Abbildungen $\mu: \overline{(\sigma^* E)} \rightarrow \sigma^* E$ und $\mu|_{\overline{(u^* \sigma^* E)}}: \overline{(u^* \sigma^* E)} \rightarrow u^* \sigma^* E$, gegeben durch:

$$(\alpha, \beta, e) \mapsto \beta^* \sigma_{\alpha(0)-1}^* \dots \sigma_1^* \sigma_0^* e \in \rho(B_{\alpha(0)}).$$

Wir wollen zeigen, dass μ ein h_* -Isomorphism ist, oder genauer, dass $\text{diag}(\mu)$ ein h_* -Isomorphismus ist. Nach (2) genügt es, zu zeigen, dass $\mu_p(q) = \mu(p, q)$ ein Isomorphismus für jedes p ist. In der Dimension p ist

$$\overline{(\sigma^* E)}(p) = \coprod_{[p] \xrightarrow{\alpha} [n]} \Delta_n \times \rho(B_0) \quad \text{und} \quad (\sigma^* E)(p) = \coprod_{[p] \xrightarrow{\alpha} [n]} \Delta_n \times \rho(B_{\alpha(0)}),$$

und μ_p ist ein Koprodukt

$$\mu_p = \coprod_{[p] \xrightarrow{\alpha} [n]} \text{id} \times \sigma_{\alpha(0)-1}^* \dots \sigma_1^* \sigma_0^*,$$

welches nach Voraussetzung ein h_* -Isomorphismus ist. Das gleiche stimmt für die Einschränkung von μ_p auf $\overline{u^* \sigma^* E}$. Daher wird das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \overline{u^* \sigma^* E} & \xrightarrow{\cong} & \overline{\sigma^* E} \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ u^* \sigma^* E & \xrightarrow{\bar{u}} & \sigma^* E \end{array}$$

zu einem Diagramm von h_* -Isomorphismen, und nach Anwendung des Funktors diag ist der Beweis vollständig. \square

BEISPIEL 4.2.9. Sei C irgendeine simpliziale Kategorie und $Z \in \text{ob}(C)$. Dann operiert C von rechts auf seinen Morphismenmengen $C(-, Z)$: sei

$$\rho_Z(X) := C(X, Z) \quad \text{und} \quad \rho_Z(X \xrightarrow{f} Y) := C(Y, Z) \xrightarrow{\sim \circ f} C(X, Z).$$

Dann ist

$$\mathcal{NE}\rho_Z = \mathcal{N}\{(X, f) \mid X \in \mathcal{C}_0, f: X \longrightarrow Z\} = \mathcal{N}(C \downarrow Z).$$

Aber die Kategorie $C \downarrow Z$ hat das initiale Objekt (Z, id_Z) , und daher ist ihr Nerv zusammenziehbar (denn eine Kategorie mit einem initialen oder finalen Objekt ist äquivalent zu der finalen Kategorie mit einem Objekt, und Nerven äquivalenter Kategorien sind homotopieäquivalent).

Es bleiben noch die Eigenschaften (1) und (2) für Homologietheorien nachzuweisen (sie gelten auch für π_* , siehe [Jar89] oder [Jar98]). Dies geschieht mit zwei Lemmata.

LEMMA 4.2.10 ((1) für Homologietheorien). *Sei $i: A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung n -simplizialer Mengen und $f: A \longrightarrow B$ eine beliebige Abbildung, die in einer Homologietheorie h_* einen Isomorphismus induziert. Sei Y der Pushout*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{j} & Y \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{i} & X \end{array} .$$

Dann induziert auch g einen Isomorphismus $g_: h_*(Y) \xrightarrow{\cong} h_*(X)$.*

Beweis: Erweitere das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{j} & Y & \longrightarrow & \text{cofib}(j) \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow \sim \\ X & \xrightarrow{i} & Y & \longrightarrow & \text{cofib}(i) \end{array}$$

Nach Anwendung des Funktors diag auf diese Kofaserfolge liefert die exakte Sequenz mit dem Fünferlemma den gewünschten Isomorphismus

$$g_*: h_*(Y) \xrightarrow{\cong} h_*(X).$$

□

LEMMA 4.2.11 ((2) für Homologietheorien). *Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung bisimplizialer Mengen mit der Eigenschaft, dass für jedes $n \in \mathbf{N}_0$*

$$f(n): X(n) \longrightarrow Y(n)$$

einen h_* -Isomorphismus induziert. Dann tut dies auch

$$\text{diag}(f): \text{diag}(X) \longrightarrow \text{diag}(Y).$$

Beweisskizze: Betrachte die bisimpliziale abelsche Gruppe $ZX(p, q)$ von Linear kombinationen von (p, q) -Prismen. Sie liefert uns einen Doppelkomplex $C(ZX(p, q))$, wo die Differentiale Wechselsummen der Bilder aller Strukturabbildungen $(p, q) \longrightarrow (p+1, q)$ bzw. $(p, q) \longrightarrow (p, q+1)$ sind. Wir erhalten eine Spektralsequenz, die gegen die Homologie des Totalkomplexes $h_*(\text{Tot}(X))$ konvergiert, mit E^0 -Term

$$E^0_{p,q} = CZX(p, q)$$

Überdies gibt es eine natürliche Homotopieäquivalenz zwischen $\text{Tot}(X)$ und $\text{diag}(X)$ (vgl. [Weis4, Theorems 8.5.1 and 8.3.8]).

Da eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ zwischen bisimplizialen Mengen, die vertikal einen h_* -Isomorphismus induziert, einen Isomorphismus der E^1 -Terme induziert, liefert ein Spektralsequenzenvergleichsargument, dass

$$\text{diag}(f): \text{diag}(X) \longrightarrow \text{diag}(Y)$$

eine h_* -Äquivalenz sein muss. \square

Beweis von 4.2.5: Zunächst wenden wir den Satz 4.2.7 auf die simpliziale Kategorie \mathcal{S}_1 an. Wir definieren zwei Operationen von \mathcal{S}_1 auf simplizialen Mengen. Zunächst ist auf den Objekten

$$(4.2.12) \quad \rho(n) := \mathcal{S}_1(n, 1) \xrightarrow[(4.2.2)]{\sim} \coprod_{g \in N_0} B\Gamma_g$$

$$(4.2.13) \quad \rho_\infty(n) := \text{holim} \{ \mathcal{S}_1(n, 1) \longrightarrow \mathcal{S}_1(n, 1) \longrightarrow \dots \},$$

wobei die Pfeile in dem Homotopielimes der Rechtstranslation mit dem Morphismus $1 \rightarrow 1$ vom Geschlecht 1 auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathcal{S}_1(n, 1)$ entspricht. In diesem einfachen Fall ist der holim einfach die Teleskopkonstruktion der Folge.

Die Operation auf den Objekten ist damit definiert; auf den Morphismen ist es einfach die Abbildung, die durch die Anheftung der Flächen von links definiert ist.

Bevor die Kategorieoperation weiter untersucht wird, soll zunächst die Homotopie von (4.2.13) untersucht werden. Sei Σ ein Skelett der Kategorie $\mathcal{S}(n, 1)$, so dass Rechtstranslation mit dem Morphismus $1 \rightarrow 1$ nicht aus Σ herausführt. Das heißt, man nimmt die volle Unterkategorie von $\mathcal{S}(n, 1)$ mit einem gewählten Objekt $n \rightarrow 1$ und allen Objekten, die daraus durch Anheftung einer endlichen Zahl von Tori von rechts entstehen. Σ ist isomorph zu $\coprod_{g \in N_0} B\Gamma_{g, n+1}$, und das folgende Diagramm kommutiert, wobei

die vertikalen Pfeile die simplizialen Abbildungen sind, die durch die Inklusion $\Sigma \hookrightarrow \mathcal{S}(n, 1)$ gegeben sind (es sind Homotopieäquivalenzen):

(4.2.14)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{S}_1(n, 1) & \longrightarrow & \mathcal{S}_1(n, 1) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \rho_\infty(n) \\
 f_0 \uparrow \simeq & & f_1 \uparrow \simeq & & & & \uparrow \phi \\
 \mathcal{N}^{(1)}\Sigma & \longrightarrow & \mathcal{N}^{(1)}\Sigma & \longrightarrow & \cdots & & \\
 \parallel & & \parallel & & & & \\
 \coprod_{g \in N_0} B\Gamma_{g, n+1} & \xrightarrow{\coprod t_i} & \coprod_{g \in N_0} B\Gamma_{g, n+1} & \xrightarrow{\coprod t_i} & \cdots & \longrightarrow & \varinjlim \left\{ \coprod_{g \in N_0} B\Gamma_{g, n+1} \right\}
 \end{array}$$

LEMMA 4.2.15. Es gibt einen Homöomorphismus (= Isomorphismus von simplizialen Mengen)

$$\varinjlim \left\{ \coprod_{g \in N_0} B\Gamma_{g, n+1} \right\} \cong Z \times B\Gamma_{\infty, n+1}.$$

Beweis: Sei $L := \varinjlim \left\{ \coprod_{g \in N_0} B\Gamma_{g, n+1} \right\}$ die linke Seite. Da die Zahl der Randkomponenten sich weder ändert noch von irgendeiner Bedeutung ist, werde ich im Folgenden den Index $n + 1$ weglassen. Explizit kann man schreiben:

$$L(k) = \{(i, g, x) \in N_0 \times N_0 \times B\Gamma_g(k)\} / \sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation \sim erzeugt wird von den Relationen

$$(i, g, x) \sim (i + 1, g + 1, t_g(x)).$$

Ein Punkt (i, g, x) entspricht hier einem Element $x \in B\Gamma_g$ im i -ten Eintrag in der Kette, auf die der direkte Limes angewandt wird.

Die Strukturabbildungen sind definiert durch $L(f) = [\text{id}_{N_0}, \text{id}_{N_0}, B\Gamma_g(f)]$ für jeden Morphismus (= monotone Abbildung der Mengen $\{0, \dots, n\}$) $f \in \Delta$. Sei $j_g: \Gamma_g \rightarrow \Gamma_\infty$ die Inklusion in den direkten Limes in (4.2.4)). Behauptung: die Abbildung

$$\begin{aligned}
 \Psi(k): \quad L(k) &\longrightarrow Z \times B\Gamma_\infty(k) \\
 [i, g, x] &\longmapsto (g - i, B j_g(x))
 \end{aligned}$$

ist ein Homöomorphismus.

Wohldefiniertheit: Es genügt zu zeigen, dass zwei Repräsentanten $(i + 1, g + 1, t_g(x))$ und (i, g, x) das gleiche Bild haben. Aber

$$\Psi(i + 1, g + 1, t_g(x)) = [g - i, B j_{g+1}(t_g(x))] = [g - i, B j_g(x)] = \Psi(i, g, x).$$

Inverse Abbildung: Jedes $x \in B\Gamma_\infty(k)$ ist von einem k -Tupel von Gruppen-elementen $g_{\infty,1}, \dots, g_{\infty,k}$ repräsentiert. Jedes $g_{\infty,i}$ hat ein Urbild $g_{\gamma_i,i}$ in irgendeinem Γ_{γ_i} , und indem wir $\bar{\gamma} \geq \max\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ wählen, können wir annehmen, dass das ganze k -Tupel in $\Gamma_{\bar{\gamma}}$ liegt. Man interpretiere $\bar{\gamma}$ als eine Funktion $\bar{\gamma}_k: B\Gamma_\infty(k) \rightarrow N_0$. Da $\bar{\gamma}$ auf jedem Punkt beliebig groß gewählt werden kann, können wir eine Abbildung definieren:

$$\gamma_k: Z \times B\Gamma_\infty(k) \rightarrow N_0, \quad \text{die } \gamma_k(z, x) \geq \max\{\bar{\gamma}_k(x), z\} \text{ erfüllt.}$$

Mit γ definieren wir eine Abbildung $\delta(k): Z \times B\Gamma_\infty(k) \rightarrow \coprod_{g \in N_0} B\Gamma_g(k)$, so dass

$$\delta(z, x) \in B\Gamma_{\gamma(z, x)}(k) \quad \text{und} \quad b_{\gamma(z, x)} \circ \delta = \text{id}.$$

Man beachte, dass δ hier keine simpliziale Abbildung sein kann. Dann definiere

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(k): \quad Z \times B\Gamma_\infty(k) &\longrightarrow L(k) \\ (z, x) &\longmapsto [\gamma_k(z, x) - z, \gamma_k(z, x)\delta_k(z, x)] \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass dies wohldefiniert, simplizial und in der Tat die inverse Abbildung zu Ψ ist. \square

Fortsetzung des Beweises von 4.2.5: Man sieht leicht, dass die Abbildung

$$\phi: \varinjlim \left\{ \coprod_{g \in N_0} B\Gamma_{g,n+1} \right\} \longrightarrow \rho_\infty(n) \quad \text{in Diagramm (4.2.14)}$$

eine schwache Homotopieäquivalenz sein muss: sie induziert Isomorphismen auf Homotopiegruppen. Für die Surjektivität wähle eine Abbildung $\gamma: S^n \rightarrow \rho_\infty(n)$, die ein Element von π_n darstellt. Da S^n kompakt ist, faktorisiert diese Abbildung durch einen Raum $S_1(n, 1)$ des direkten Systems; dabei ist die vertikale Abbildung f_i eine schwache Äquivalenz, also erhalten wir eine Abbildung $\gamma': S^n \rightarrow B\Gamma_{g,n+1} \rightarrow B\Gamma_{\infty,n+1}$. Wegen der Kommutativität des Diagramms ist $\phi_*[\gamma'] = [\gamma]$. Für die Injektivität wiederholt man wie üblich das Argument für eine Nullhomotopie.

Nach Beispiel 4.2.9 ist $\mathcal{N}\mathcal{E}\rho$ zusammenziehbar. Aber da $\rho_\infty(n) = \text{holim} \rho(n)$ ist, gilt das auch für den Translationsraum $\mathcal{N}\mathcal{E}\rho_\infty \simeq \text{holim} \mathcal{N}\mathcal{E}\rho \simeq *$.

Also hat die Homologiefaserung $\mathcal{N}\mathcal{E}\rho_\infty \rightarrow \mathcal{N}\mathcal{S}$ einen zusammenziehbaren Totalraum, und die Homotopiefaser ist $\Omega\mathcal{N}\mathcal{S}$. Um zu zeigen, dass der Gruppenvervollständigungssatz 4.2.7 anwendbar ist, müssen wir zeigen, dass jedes 0-Simplex in \mathcal{S}_1 einen H_* -Isomorphismus induziert. Aber ein 0-Simplex in $\mathcal{S}_1(m, n)$ ist einfach eine Fläche, die durch wiederholtes Anheften eines Torus, einer Hose oder einer Scheibe entsteht, und durch Umnummerierungen. Nach den Korollaren 3.1.3 und 3.1.4 für die herkömmlichen Spin-Abbildungsklassengruppen und 3.2.1 für die masbaumschen induziert die

Operation also Isomorphismen $H_*(\rho_\infty(\mathfrak{n}); \mathbf{Z}) \rightarrow H_*(\rho_\infty(\mathfrak{m}); \mathbf{Z})$; Umnummerierungen sicherlich genauso. Daher greift der Satz 4.2.7 und liefert, dass die Inklusion der Faser in die Homotopiefaser

$\mathbf{Z} \times B\Gamma_{\infty,1} \simeq \rho_\infty(0) \longrightarrow \text{hofib}(\mathcal{N}\mathcal{E}\rho_\infty \rightarrow \mathcal{N}\mathcal{S}) \simeq \Omega\mathcal{N}\mathcal{S}$

eine $H_*(-, \mathbf{Z})$ -Äquivalenz ist. □

ANHANG A

n -Kategorien und monoidale Strukturen

A.1. n -Kategorien

Da in Kapitel 4 monoidale 2-Kategorien verwendet werden, gebe ich in diesem Anhang die wichtigsten Definitionen von n -Kategorien und einige Eigenschaften an. 2-Kategorien sind Kategorien, deren Morphismenmengen wiederum kleine Kategorien sind, d.h., zwischen je zwei Morphismen zwischen den gleichen Objekten gibt es 2-Morphismen. Natürlich kann man ebenso n -Kategorien für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definieren (eine 0-Kategorie ist dann einfach eine Klasse). Eine bohrende Frage bei solchen Konstruktionen ist stets die der Kohärenz. Bei einer 2-Kategorie stellt sich eine solche Frage etwa in folgender Situation: bei (1-)Kategorien muss das Assoziativgesetz bezüglich der Komposition erfüllt sein:

$$(A.1.1) \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Dies kann man sicher auch in einer 2-Kategorie fordern, und in dieser Arbeit werde ich das auch tun. Es ist allerdings nicht immer die natürlicheste Betrachtungsweise, da es sich bei der Gleichung A.1.1 um eine Identität zwischen Objekten einer Kategorie handelt, wenn auch einer kleinen Kategorie. Daher definiert man oft eine 2-Kategorie so, dass A.1.1 nur bis auf Isomorphismus gilt:

$$(A.1.1')$$

$$\text{Es gibt zueinander inverse 2-Morphismen } f \circ (g \circ h) \xrightleftharpoons[\psi]{\phi} (f \circ g) \circ h$$

Man sollte dies mit der topologischen Situation vergleichen: Wählt man als Objekte die Punkte eines topologischen Raums, als Morphismen die Wege zwischen zwei Punkten und als 2-Morphismen die Homotopien solcher Wege, so erhält man genau die obige Situation, außer, dass es sich hierbei nicht um eine allgemeine 2-Kategorie, sondern sogar um ein 2-Gruppoid handelt. Im Fall zusätzlicher Struktur (etwa n -Kategorien für $n \geq 3$, monoidale Strukturen) wird man für die Isomorphismen in (A.1.1)' fordern, dass alle Diagramme, die man aus ihnen zusammensetzen kann, kommutieren, im Sinne von [Mac71]. Dies ist zum Beispiel für n -Kategorien sehr schnell sehr

unübersichtlich, und erst kürzlich ist es gelungen, System in diese höheren Kohärenzabbildungen zu bekommen. Wie gesagt sind unsere Kategorien aber stets von dem „striktestmöglichen“ Typ:

(REKURSIVE) DEFINITION A.1.2. Eine (rekursive, strikte) **0-Kategorie** ist eine Klasse, ein **0-Funktör** ist eine Abbildung zwischen 0-Kategorien. Eine n -Kategorie heißt **klein**, falls die zugrundeliegende Objektklasse eine Menge ist. Unter Verwendung der Begriffe $(n - 1)$ -Kategorie und $(n - 1)$ -Funktör definieren wir:

Eine **n -Kategorie** \mathcal{C} ist eine nichtleere Klasse $\text{ob}(\mathcal{C})$ von Objekten und, für jedes Paar $x, y \in \mathcal{C}$, eine kleine $(n - 1)$ -Kategorie $\mathcal{C}(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ von Morphismen, zusammen mit einem assoziativen **Verkettungsfunktör**

$$\circ: \mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) \longrightarrow \mathcal{C}(x, z),$$

der in jedem $\mathcal{C}(x, x)$ eine Rechts- und Linksidealität id_x hat. Produkte und Koprodukte von n -Kategorien sind auf die evidente Weise erklärt. Die **totale Morphismenkategorie** von \mathcal{C} ist die $(n - 1)$ -Kategorie

$$\mathcal{C}' := \mathcal{C}^{(1)} := \coprod_{x, y \in \text{ob}(\mathcal{C})} \mathcal{C}(x, y)$$

Die Objekte von $\mathcal{C}^{(k)} := \mathcal{C}^{(k-1)'}'$ heißen **k -Morphismen** der n -Kategorie \mathcal{C} . Ein **n -Funktör** F zwischen zwei n -Kategorien \mathcal{C}, \mathcal{D} besteht aus einer Abbildung $\text{ob}(F): \text{ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{ob}(\mathcal{D})$ und einem $(n - 1)$ -Funktör $F': \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{D}'$, wobei $F'(\mathcal{C}(x, y)) \subseteq \mathcal{D}(\text{ob}(F)(x), \text{ob}(F)(y))$. Außerdem muss für jedes $x \in \text{ob}(\mathcal{C})$ gelten $F'(\text{id}_x) = \text{id}_{\text{ob}(F)(x)}$, und das folgende Diagramm muss kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) & \xrightarrow{F \times F} & \mathcal{D}(y', z') \times \mathcal{D}(x', y') \\ \downarrow \circ & & \downarrow \circ \\ \mathcal{C}(x, z) & \xrightarrow{F} & \mathcal{D}(x, z). \end{array}$$

Da Verwechslungen aus Typgründen nicht möglich sind, schreibt man F für $\text{ob}(F)$ und F' .

BEMERKUNG A.1.3. Ein k -Morphismus f liefert auf kanonische Weise einen $k + 1, k + 2, \dots$ -Morphismus $\text{id}_f, \text{id}_{\text{id}_f}$ etc., und ich werde sie in der Notation identifizieren. Umgekehrt liefert er zwei verschiedene $k - 1$ -Morphismen $\text{source}(f)$ und $\text{target}(f)$. Der allgemeinste Morphismus ist also der n -Morphismus.

Wir nähern uns dem Konzept der n -Kategorie jetzt aus einer etwas anderen Richtung. Dazu definieren wir:

DEFINITION. Ein **partielles Monoid** ist eine Menge X mit einer partiellen Abbildung $\square: X \times X \rightarrow X$ und einer Teilmenge $\mathcal{I} \subseteq X$, genannt die Menge der Identitäten, mit den Eigenschaften:

$$(A.1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Falls eine Seite in der Gleichung } (x \square y) \square z = x \square (y \square z) \\ \text{definiert ist, so ist es auch die andere, und sie sind} \\ \text{gleich;} \\ \text{(ii) } i \square x = x \text{ und } y \square i = y, \text{ wenn } i \in \mathcal{I} \text{ und die Ver-} \\ \text{knüpfung definiert ist;} \\ \text{(iii) für jedes } x \in X \text{ gibt es (automatisch eindeutige) } i, j \in \\ \mathcal{I}, \text{ so dass } i \square x \text{ und } x \square j \text{ definiert sind.} \end{array} \right.$$

Unter einer partiellen Abbildung von A nach B verstehe ich dabei eine rechte eindeutige Relation $\subseteq A \times B$.

Ein **Homomorphismus** von partiellen Monoiden $(X, \square, \mathcal{I})$ und $(Y, \square, \mathcal{J})$ ist das Offensichtliche, nämlich eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$, so dass gilt:

1. $f(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{J}$
 2. Ist $x \square y$ definiert, dann auch $f(x) \square f(y)$, und $f(x \square y) = f(x) \square f(y)$.
- Falls \mathcal{I} aus nur einem Element besteht, erhalten wir die übliche Definition eines Monoids (mit Eins).
 - Ein partielles Monoid ist nichts anderes als die totale Morphismenmenge einer kleinen Kategorie. Um eine Kategorie C aus einem partiellen Monoid zu bauen, definiert man:

$$\begin{aligned} \text{ob}(C) &:= \mathcal{I} \text{ und} \\ C(i, j) &:= \{x \in X \mid j \circ x \circ i \text{ ist definiert.}\} \end{aligned}$$

und betrachtet $\text{ob}(C)$ und C' als disjunkt. Die Kompositionsabbildung ist die Monoidmultiplikation, und man überprüft leicht die Kategorienaxiome. Also sind partielle Monoide und 1-Kategorien das gleiche Konzept. Um dies auf höhere Kategorien zu verallgemeinern, brauchen wir:

DEFINITION. Sei X eine Menge mit k verschiedenen partiellen Monoidstrukturen $\square_1, \dots, \square_k$. Diese Folge von Strukturen heißt **kompatibel**, falls gilt:

$$(A.1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{1. Wenn } (x_1 \square_i y_1) \square_j (x_2 \square_i y_2) \text{ definiert ist, dann auch} \\ \text{ } (x_1 \square_j x_2) \square_i (y_1 \square_j y_2), \text{ und beides ist gleich;} \\ \text{2. ist } x \text{ eine Rechts- oder Linksidevität für } \square_i, \text{ dann auch} \\ \text{für } \square_j, \text{ falls } j > i. \end{array} \right.$$

DEFINITION. Eine (**iterative**) **n -Kategorie** ist eine Menge X mit n kompatiblen partiellen Monoidstrukturen. Ein n -Funktor ist eine Abbildung zwischen X und Y , der bezüglich aller Monoidstrukturen ein Homomorphismus ist.

PROPOSITION A.1.6. *Iterative und kleine rekursive n -Kategorien können identifiziert werden. Genauer ist es die Funktion $-(^{(n)})$, die einer kleinen rekursiven n -Kategorie die Menge ihrer n -Morphismen zuordnet und Werte in n -fach kompatiblen Monoiden annimmt und eine Inverse \mathcal{B}^n hat.*

Der Beweis folgt im nächsten Abschnitt.

BEISPIEL A.1.7. Der Prototyp einer n -Kategorie ist die Kategorie $(n-1)-\underline{\text{Cat}}$ aller kleinen $(n-1)$ -Kategorien, wobei die Morphismen die $(n-1)$ -Funktoren sind. Um einzusehen, dass dies wirklich eine n -Kategorie ist, definieren wir:

DEFINITION. Seien $F_1, F_2: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwei n -Funktoren von rekursiven n -Kategorien \mathcal{C}, \mathcal{D} . Die $(n-1)$ -Kategorie der **Morphismen** oder **natürlichen Transformationen** zwischen diesen Funktoren ist die Menge aller $(n-1)$ -Funktoren $H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}'$, für die gilt: source $H(x) = F_1(x)$, target $H(x) = F_2(x)$, und das folgende Diagramm kommutiert für alle $(n-1)$ -Morphismen x, y und alle n -Morphismen $f: x \rightarrow y$:

$$\begin{array}{ccc} F_1(x) & \xrightarrow{H(x)} & F_2(x) \\ F_1(f) \downarrow & & \downarrow F_2(f) \\ F_1(y) & \xrightarrow{H(y)} & F_2(y). \end{array}$$

Wenn $(n-1)-\underline{\text{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}')$ ein $(n-1)$ -Kategorie ist, dann auch die Unterkategorie der Morphismen von F_1 nach F_2 ; daher erhalten wir induktiv, dass die natürlichen Transformationen von F_1 nach F_2 tatsächlich eine $(n-1)$ -Kategorie bilden.

BEISPIEL A.1.8. Ein anderes einfaches Beispiel kommt von den Gruppen her. Ist G eine Gruppe (oder nur ein Monoid), dann ist G eine 0-Kategorie, und es gibt im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, G als eine 1-Kategorie zu verstehen: die erste ist $\mathcal{B}G$, die Kategorie mit einem Objekt und einem (Iso-)Morphismus g für jedes $g \in G$; die Verkettung entspricht der Gruppenmultiplikation.

Die andere Methode ist, G als die Objektmenge zu wählen und einen Morphismus $g \in G$ von h nach hg zu haben. Auf diese Weise ist die Information von G redundanter kodiert; diese Kategorie, die wir $\mathcal{E}G$, die Translationskategorie von G nennen, hat $\#G$ Elemente und genau einen Morphismus zwischen jedem Paar von Objekten. Sie ist ein Gruppoid und äquivalent zu der terminalen Kategorie.

Man kann sich nun fragen, ob G auch auf natürliche Weise die Struktur einer höheren Kategorie gegeben werden kann. Da nur die Gruppenstruktur zur Verfügung steht, könnten wir ein Objekt nehmen, einen 1-Morphismus und

G als die Menge der 2-Morphismen, wobei \circ_1 und \circ_2 die Gruppenmultiplikation sind. Da je zwei Morphismen verkettbar sind, müssen wir sicherstellen, dass die Gleichung

$$(g \circ_1 g') \circ_2 (h \circ_1 h') = (g \circ_2 h) \circ_1 (g' \circ_2 h')$$

$$\iff gg'h h' = ghg'h' \quad \text{für alle } g, g', h, h' \in G.$$

gilt. Also muss G abelsch sein. In der Tat kann man dann auf die gleiche Weise auch eine 3-, 4-, ... Kategorie aus G bauen.

A.2. Zwei Konzepte werden kombiniert: monoidale Kategorien

Es ist praktisch, von Zeit zu Zeit zwischen dem monoidalen und dem rekursiven Standpunkt hin- und herzuwechseln; oft begegnet man z.B. beiden Konzepten in Form einer monoidalen Kategorie, die ein Spezialfall einer k -monoidalen n -Kategorie ist. Der Begriff der monoidalen Kategorie ist besonders wichtig in der Theorie der Schleifenräume. Daher erweitern wir die Definition eines Monoids:

DEFINITION. Eine **monoidale Struktur** auf einer kleinen rekursiven n -Kategorie C ist ein assoziativer n -Funktork $\square: C \times C \rightarrow C$ mit einem Rechts- und Linksidealitätselement $\emptyset \in C$. C heißt dann monoidal. Eine **partielle monoidale Struktur** ist die offensichtliche Verallgemeinerung der Definition eines partiellen Monoids auf n -Kategorien: ein „partieller“ n -Funktork $\square: C \times C \rightarrow C$ mit einer Teilmenge $I \subseteq \text{ob}(C)$, der (A.1.4) erfüllt. Partiell bedeutet hier, dass der Funktor vielleicht nicht auf allen Objekten definiert ist, aber falls er auf (X, Y) und (X', Y') definiert ist, so auch auf jedem k -Morphismus $(f, g): (X, Y) \rightarrow (X', Y')$, für jedes $k \geq 1$. Wenn wir k partiell-monoidale Strukturen auf C haben, so nennen wir sie **kompatibel**, falls die Axiome (A.1.5) gelten.

Folgende Proposition ist stärker als Proposition A.1.6 und impliziert letztere:

PROPOSITION A.2.1. Sei $k\text{Mon}n\text{cat}$ die 1-Kategorie aller kleinen k -fach kompatibel partiell-monoidalen n -Kategorien, wobei die Morphismen Funktoren sind, die Homomorphismen solche bezüglich aller monoidaler Strukturen sind. Für $k \geq 1$ gibt es dann zueinander bis auf natürliche Isomorphismen inverse Funktoren

$$k\text{Mon}n\text{cat} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad B \quad} \\[-1ex] \xleftarrow[\text{mor}]{} \end{array} (k-1)\text{Mon}(n+1)\text{cat},$$

wobei mor der Funktor ist, der einer Kategorie ihre totale Morphismenmenge zuordnet. Insbesondere kann man durch Iteration der Funktoren n -fach kompatible partielle Monoide mit n -Kategorien identifizieren.

- \mathcal{B} heißt **klassifizierender Funktor** einer monoidalen Kategorie. Viele Autoren benutzen den Buchstaben ‘ B ’, um den Nerv einer Kategorie zu bezeichnen, den ich \mathcal{N} nenne.

Beweis: Zuallererst müssen wir nachprüfen, dass mor tatsächlich k -fach kompatibel partiell-monoidale n -Kategorien liefert. Definiere

$$\begin{aligned} \text{mor : } & (k-1)\underline{\text{Mon}}(n+1)\underline{\text{cat}} \longrightarrow k\underline{\text{Mon}}\underline{n}\underline{\text{cat}} \\ & ((\mathcal{C}, \circ, \square_1, \dots, \square_{k-1}) \mapsto (\mathcal{C}', \diamond_1, \dots, \diamond_k) \\ & \quad (F: X \longrightarrow Y) \mapsto F', \end{aligned}$$

wobei

$$\diamond_1 = \circ, \diamond_2 = \square'_1, \dots, \diamond_k = \square'_{k-1},$$

und die Identitäten für \diamond_1 sind $\{\text{id}_X \mid X \in \mathcal{C}_0\}$.

Die Kompatibilitätsaxiome (A.1.5) müssen überprüft werden. Da $\diamond_2, \dots, \diamond_k$ nach Definition kompatibel sind, bleibt zu zeigen:

1. $(x \diamond_j y) \diamond_1 (x' \diamond_j y') = (x \diamond_1 x') \diamond_j (y \diamond_1 y')$ für alle $j > 1$;
2. ist x Rechts- oder Linksidealität für \diamond_1 , dann auch für jedes \diamond_j , $j \leq k$.

Die erste Behauptung ist klar, da \square_j ein $(n+1)$ -Funktor ist: er wirft Kompositionen auf Kompositionen. Die zweite Bedingung ist nicht weniger offensichtlich, denn die Eigenschaft, eine Identität zu sein, wird von Funktoren erhalten.

Für die Inverse definieren wir

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : & k\underline{\text{Mon}}\underline{n}\underline{\text{cat}} \longrightarrow (k-1)\underline{\text{Mon}}(n+1)\underline{\text{cat}} \\ & (\mathcal{C}, \diamond_1, \dots, \diamond_k) \mapsto ((\mathcal{D}, \circ), \square_1, \dots, \square_{k-1}) \\ & (F: X \longrightarrow Y) \mapsto F, \end{aligned}$$

wobei

$$\text{ob}(\mathcal{D}) := \mathcal{I}, \text{ die Identitäten für } \diamond_1;$$

$$\mathcal{D}(I, J) := \{X \in \mathcal{C} \mid J \diamond_1 X \diamond_1 I \text{ ist definiert}\};$$

$$\circ := \diamond_1;$$

$$\square_j := \diamond_j + 1 \quad (j = 1, \dots, k-1).$$

Die Komposition ist wohldefiniert, da $X \in \mathcal{D}(J, K)$, $Y \in \mathcal{D}(I, J)$ impliziert, dass $K \diamond X \diamond J \diamond Y \diamond I = X \diamond Y$ definiert ist. Nach Definition ist sie ein assoziativer n -Funktor, daher erhalten wir eine $(n+1)$ -Kategorie. Wir müssen aber noch zeigen, dass die verbleibenden $\square_1, \dots, \square_{k-1}$ immer noch eine $(k-1)$ -fach kompatibel partiell-monoidale Struktur auf \mathcal{D} definieren.

Dazu genügt es, zu zeigen: *Für alle j ist \square_j ein assoziativer n -Funktor.* Denn wenn wir das erste Element einer kompatiblen Folge entfernen, bleibt der Rest kompatibel.

Die Assoziativität ist klar. Für die Funktionalität beachte, dass \diamond_j Identitäten auf Identitäten abbildet:

$$\text{id}_{I \times J} = I \times J \in \mathcal{D}' \times \mathcal{D}'$$

und falls folgendes definiert ist, so gilt

$$I \diamond_j J = I = J \quad \text{nach Axiom (ii) der Kompatibilität (A.1.5).}$$

Wenn wir verkettbare Morphismen $X \times X', Y \times Y': \mathcal{D}' \times \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}' \times \mathcal{D}'$ haben, dann ist

$$(X \circ Y) \diamond_j (X' \circ Y') \underset{\text{Def}}{=} (X \diamond Y) \diamond_j (X' \diamond Y') \underset{\text{A.1.5(i)}}{=} (X \diamond_j Y) \diamond (X' \diamond_j Y').$$

□

Besonders wichtig sind für uns monoidale Strukturen, die „kommutativ“ sind, zumindest bis auf natürliche Isomorphismen. Präziser:

DEFINITION. Eine monoidale Struktur heißt **symmetrisch**, falls es eine natürliche Transformation $s: \square \rightarrow \square \circ \text{Tw}$ gibt, wobei $\text{Tw} \in \text{End}(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ der Vertauschungsfunktor ist, die die folgenden Verträglichkeitsbedingungen mit der monoidalen Struktur erfüllt:

1. $s(X, 0) = \text{id}_X = s(0, X);$
2. $s(X, Y \square Z) = (\text{id}_Y \square s(X, Z)) \circ (s(X, Y) \square \text{id}_Z);$
3. $s(Y, X) \circ s(X, Y) = \text{id}_{X \square Y}.$

Falls die letzte Bedingung nicht gilt, spricht man von einer **Flechtung** oder **Zopfung**. Eine symmetrisch-monoidale Kategorie wird in anderen Kreisen auch **Tensorkategorie** genannt.

Während es kaum strikt *kommutative* monoidale Kategorien in der Natur gibt, gibt es doch recht häufig *symmetrische*. So ist zum Beispiel jede Kategorie mit strikt monoidalen endlichen Produkten oder Koprodukten symmetrisch-monoidal.

ANHANG B

Nerven von Kategorien

B.1. Nerven

In diesem Anhang erinnere ich an einige alte Konstruktionen und Ergebnisse von Segal [Seg68] und May [May72], siehe auch [Ada78]. Sei C eine kleine Kategorie, also eine Kategorie, in der die Objekte eine Menge bilden. Die Voraussetzung der Kleinheit ist in diesem ganzen Kapitel nötig, weil wir zu C den klassifizierenden Raum bilden möchten und es umständlich ist, über geometrische Objekte zu sprechen, deren Punkte eine echte Klasse bilden. Man kann allerdings größtenteils, mit Blick auf Proposition B.1.2, auch große Kategorien mit einem kleinen Skelett zulassen. Ein Skelett einer (evtl. großen) Kategorie \mathcal{C} ist eine volle Unterkategorie \mathcal{S} , so dass jedes Objekt aus \mathcal{C} zu genau einem Objekt aus \mathcal{S} isomorph ist.

Zu einer beliebigen Kategorie \mathcal{D} bezeichne $\Delta\mathcal{D}$ die Kategorie der simplizialen Objekte in \mathcal{D} . Präziser gesagt, wenn wir mit Δ die Kategorie der geordneten Mengen $[n] := \{0, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, zusammen mit den monotonen Abbildungen bezeichnen, so ist $\Delta\mathcal{D} = \underline{\text{Fun}}(\Delta^{\text{op}}, \mathcal{D})$ die Kategorie der kontravarianten Funktoren von Δ nach \mathcal{D} , wobei die Morphismen die natürlichen Transformationen sind. Für weitere Informationen über simpliziale Objekte verweise ich auf den Klassiker [May72] oder [Jar98].

Ein n -simpliziales Objekt ist definiert als ein simpliziales Objekt in der Kategorie der $(n-1)$ -simplizialen Objekte. Man kann äquivalent definieren, dass ein n -simpliziales Objekt in \mathcal{D} ein Funktor von $(\Delta^{\text{op}})^n$ nach \mathcal{D} ist. $\Delta^n\mathcal{D}$ ist die Kategorie der n -simplizialen Objekte in \mathcal{D} .

Ist $X \in \mathcal{D}$ ein Objekt, so kann man es stets als simpliziales Objekt auffassen:

- $\text{const}(X)$ ist die simpliziale Menge mit

$$\text{const}(X)[n] = X \quad \text{und} \quad \text{const}(X)(f) = \text{id}_X$$

für $f: [n] \rightarrow [m]$.

Umgekehrt ist jedes k -simpliziale Objekt ein 1-simpliziales Objekt:

- $\text{diag}(X)$ ist die simpliziale Menge mit $\text{diag}(X)[n] = X(\underbrace{[n], \dots, [n]}_{k\text{-mal}})$ und
 $\text{diag}(X)(f) = X(f \times \dots \times f)$.

NOTATION. Ich benutze die folgenden Bezeichnungen:

- Ens — die Kategorie aller Mengen
- Top — die Kategorie der kompakt erzeugten Hausdorff-Räume
- Cat — die Kategorie aller kleinen Kategorien und Funktoren.

KONSTRUKTION B.1.1 (Segal). *Es gibt einen Funktor $\mathcal{N}: \underline{\text{Cat}} \rightarrow \Delta \underline{\text{Ens}}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. \mathcal{N} kommutiert mit allen Produkten und Koprodukten;
2. Ist G eine Gruppe, aufgefasst als eine Kategorie mit einem Objekt und lauter Isomorphismen, so ist $\mathcal{N}(G)$ der simpliziale klassifizierende Raum BG von G , d.h. $\pi_1(\mathcal{N}G) = G$ und $\pi_i(\mathcal{N}G) = 0$ für $i \neq 1$;
3. Eine natürliche Transformation von Funktoren $F, G: C \rightarrow D$ induziert eine Homotopie zwischen den Abbildungen $\mathcal{N}F$ und $\mathcal{N}G$. Genauer gesagt, kann man jede natürliche Transformation auffassen als einen Funktor H von $C \times [1]$ nach D , wobei $[1] = \{0 \rightarrow 1\}$ die Kategorie mit zwei Objekten und drei Morphismen ist. Dann liefert $\mathcal{N}H$ eine Homotopie von $\mathcal{N}H|_{(C,0)} = \mathcal{N}F$ nach $\mathcal{N}H|_{(C,1)} = \mathcal{N}G$.

Dieser Funktor, genannt Nerv, ordnet C die simpliziale Menge zu, deren n -Simplizes aus Diagrammen der Form $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n$ bestehen.

PROPOSITION B.1.2. Äquivalente Kategorien besitzen homotopieäquivalente Nerven.

Beweis: Klar wegen (3) □

Wir betrachten jetzt das Zusammenspiel des Nervfunktors mit dem Konzept der höheren Kategorie. Es sei C eine n -Kategorie. Wir möchten den Nerve von C definieren als diejenige $n - 1$ -Kategorie, die man erhält, wenn man die 1-Kategorien $C^{(n-1)}$ durch ihre Nerven ersetzt. Es ist jedoch nicht völlig klar, wie man diese Kategorie genau konstruieren muss: da wir die n -Morphismen abgeändert haben, müssen wir die unteren Kompositionsoperationen umdefinieren. Wir stellen uns dazu C als $n - 1$ -fache partiell monoidale Kategorie vor. Nehmen wir dann den Nerv, werden die Monoidmultiplikationen \circ_i , $i = 1, \dots, n - 1$, zu $\mathcal{N}\circ_i$, und die Identitäten übertragen sich sofort: z.B. ist

$$(-\mathcal{N}\circ_i -)\mathcal{N}\circ_j (-\mathcal{N}\circ_i -) = (-\mathcal{N}\circ_j -)\mathcal{N}\circ_i (-\mathcal{N}\circ_j -) \in \Delta \underline{\text{Ens}}((\mathcal{N}C)^5, \mathcal{N}C)),$$

denn dies ist wahr für 1-Simplizes und daher für alle Simplizes. Daher ist die folgende Definition gerechtfertigt:

DEFINITION. Sei C eine n -Kategorie, $n \geq 1$. Wir definieren den **1 -Nerv** $\mathcal{N}^{(1)}C$ von C als die $(n-1)$ -Kategorie, die man erhält, wenn man die Nerven der Kategorien der n -Morphismen nimmt. Der **k -Nerv**, $k \leq n$, ist dann $\mathcal{N}^{(k)}C := \mathcal{N}^{(1)}\mathcal{N}^{(k-1)}C$, und $\mathcal{N}C := \mathcal{N}^{(n)}C$ heißt der **totale Nerv** von C , eine n -simpliziale Menge.

Man sieht leicht, dass

$$\mathcal{N}: n\text{-}\underline{\text{cat}} \longrightarrow \Delta^n \underline{\text{Ens}}$$

ein Funktor ist.

LEMMA B.1.3. *Ist (C, \square) eine monoidale n -Kategorie, so ist $\mathcal{N}^{(1)}C$ eine monoidale $n-1$ -Kategorie mit monoidaler Struktur $\mathcal{N}\square$.*

Beweis: Dies ist klar, da man eine monoidale n -Kategorie als eine $(n+1)$ -Kategorie mit einem Objekt auffassen kann; dann nimmt man $\mathcal{N}^{(1)}$, erhält eine n -Kategorie mit einem Objekt, und dies ist wiederum dasselbe wie eine monoidale $n-1$ -Kategorie. \square

B.2. Geometrische Realisierung

KONSTRUKTION B.2.1 (Geometrische Realisierung). *Es gibt einen Funktor $|\cdot| = |\cdot|_n$ von $\Delta^n \underline{\text{Top}} \supseteq \Delta^n \underline{\text{Ens}}$ nach $\underline{\text{Top}}$, genannt geometrische Realisierung, mit folgenden Eigenschaften:*

1. $|\cdot|$ erhält endliche Produkte (in $\underline{\text{Top}}$ müssen wir dazu das Kelley-Produkt von kompakt erzeugten Räumen nehmen) [Mil57];
2. $|\cdot|$ erhält alle direkten Limites, insbesondere alle Koprodukte;
3. Für eine simpliziale Homotopie H ist $|H|$ eine topologische Homotopie;
4. Für bisimpliziale Räume X gilt $|X|_2 \cong ||X|_1|_1 \cong |\text{diag}(X)|_1$ [Qui73].

Die Konstruktion geschieht durch Zusammenkleben von geometrischen Standardprismen der Form

$$P_d := P_{d_1} \times \cdots \times P_{d_n} \quad \text{für } d \in N_0^n$$

und

$$P_d := \left\{ x \in \mathbf{R}^{d+1} \mid \sum x_i = 1 \right\} \quad \text{für } d \in N_0$$

P ist ein kovarianter Funktor von der Kategorie Δ^n in die Kategorie $\underline{\text{Top}}$.

Als dann setzt man für n -simpliziale Räume X

$$|X|_n := \left(\coprod_{d \in N_0} X_d \times P_d \right) / \sim,$$

wobei \sim für $x \in X_c, t \in P_d$ von Relationen der Form

$$(x, \alpha_*(t)) \sim (\alpha^*(x), t)$$

für jede Abbildung $\alpha \in \text{Hom}_{\Delta^n}(([d_1], \dots, [d_n]), [c_1], \dots, [c_n]))$ erzeugt wird.
Um $\|\cdot\|$ zu einem Funktor zu machen, definiert man für $f: X \rightarrow Y$

$$|f|(x, t) := (f(x), t)$$

Die Eigenschaft von f , eine Abbildung simplizialer Räume zu sein, garantiert die Wohldefiniertheit.

ANHANG C

Operaden und unendliche Schleifenräume

In den siebziger Jahren wurde eine Reihe von „Schleifenraummaschinen“ entwickelt, die den allgemeinen Zweck hatten, zu einem gegebenen topologischen Raum X zu entscheiden, ob dieser Raum homotopieäquivalent zu dem Raum der Schleifen auf einem anderen Raum Y ist, oder gar zu dem n -fachen Schleifenraum auf einem dritten Raum Z . Es kann geschehen, dass X sogar für jedes n homotopieäquivalent zu einem n -fachen Schleifenraum auf einem Raum Z_n ist; in diesem Fall ist X der Raum im Grad 0 eines Ω -Spektrums. X heißt dann auch unendlicher Schleifenraum. Betrachtet man die Theorie von der Seite der (moderneren) Ω -Spektren, so fasst man die Objekte als unendliche Schleifenräume zusammen mit allen n -fachen Schleifenstrukturen auf, wohingegen der Begriff des unendlichen Schleifenraums die spezielle Schleifenstruktur nicht erwähnt; hier gibt es natürlich oft mehrere, nicht homotopieäquivalente Möglichkeiten.

Ähnlich zu dem Spektrifizierungsfaktor, der aus einem Präspektrum, wo von den Abbildungen $\Sigma X_n \rightarrow X_{n+1}$ nichts weiteres gefordert wird, ein Spektrum macht, wo die Abbildungen $X_n \rightarrow \Omega X_{n+1}$ Homöomorphismen sein müssen, gibt es zu jeder dieser Schleifenraummaschinen einen Approximationsfaktor, der gewisse Räume X durch unendliche Schleifenräume approximiert und gewisse universelle Eigenschaften erfüllt.

Diese Arbeit verwendet das folgende fundamentale Resultat:

SATZ C.0.1. *Sei C eine symmetrisch monoidale Kategorie, die zusammenhängend ist (d.h. zwischen je zwei Objekten x, y gibt es eine Kette von Morphismen $x = x_0 \leftarrow x_1 \rightarrow x_2 \leftarrow \dots x_n = y$). Dann ist der Nerv $\mathcal{N}C$ ein unendlicher Schleifenraum.*

Um dies zu illustrieren, erinnere ich an die Grundbegriffe des Operadenzugangs nach May [May72]. Unter Voraussetzung der Hauptresultate der Operadentheorie für Schleifenraumoperaden werde ich zeigen, wie man den Satz C.0.1 herleitet. Wir arbeiten dazu in der Kategorie der simplizialen Mengen; dies ist aber keine echte Einschränkung, man kann leicht sehen, dass es mit topologischen Räumen z.B. auch funktionieren würde. Unter einem „Raum“ verstehe ich in diesem Kapitel immer eine simpliziale Menge.

DEFINITION. Eine E_∞ -**Operade** \mathbf{o} ist eine Folge zusammenziehbarer Räume \mathbf{o}_k ($k \in \mathbb{N}_0$) mit einer freien simplizialen Rechtsoperation ρ der symmetrischen Gruppe S_k , zusammen mit Strukturabbildungen, die unten beschrieben sind. \mathbf{o}_0 soll dabei immer der Ein-Punkt-Raum sein. Wir verwenden folgende Notation:

$$\mathbf{o}_k^n := \bigsqcup_{j_1 + \dots + j_n = k} (\mathbf{o}_{j_1} \times \dots \times \mathbf{o}_{j_n}).$$

Die zusätzliche Struktur besteht aus:

1. *Kompositionsabbildungen*

$$\gamma: \mathbf{o}_k \times \mathbf{o}_l^k \longrightarrow \mathbf{o}_l, \quad \text{wobei } k, l \in \mathbb{N}_0.$$

Definiere die **Shuffle-Abbildung** durch

$$\begin{aligned} \text{sh: } \mathbf{N}_0^* \times \mathbf{N}_0^* &\longrightarrow \mathbf{N}_0^* \\ (j_1, &\quad k_1, \quad \dots, \quad k_{j_1} \\ j_2, &\quad k_{j_1+1}, \quad \dots, k_{j_1+j_2}, \\ j_1, \dots, j_t, k_1, \dots, k_{\sum j} &\mapsto \vdots, \quad \vdots, \quad \dots, \quad \vdots \\ &\quad \vdots, \quad \vdots, \quad \dots, \quad \vdots \\ &\quad j_t, k_{j_1+\dots+j_{t-1}+1}, \dots, k_{\sum j}) \end{aligned}$$

wobei \mathbf{N}_0^* die Folgen nichtnegativer ganzer Zahlen bezeichnet, die an fast allen Stellen 0 sind. Indem wir diese Abbildung benutzen, um die Indizes zu permutieren, können wir γ zu einer Abbildung

$$\mathbf{o}_k^j \times \mathbf{o}_l^k \xrightarrow{(\gamma \times \dots \times \gamma) \circ \text{sh}^*} \mathbf{o}_l^j,$$

fortsetzen, und wir fordern die folgende Assoziativitätseigenschaft:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{o}_j \times \mathbf{o}_k^j \times \mathbf{o}_l^k & \xrightarrow{\gamma \times \text{id}} & \mathbf{o}_k \times \mathbf{o}_l^k \\ \text{id} \times \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \mathbf{o}_j \times \mathbf{o}_l^j & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{o}_l \end{array}$$

Außerdem fordern wir, dass die Operation S -äquivalent ist: Sind $k_i \in \mathbb{N}_0$ für $1 \leq i \leq j$, $k = \sum k_i$, und ist $\text{bl}: S_j \longrightarrow S_k$ der „Blockpermutationshomomorphismus“ in Bezug auf die Partition k_i von k , und ist $\tau: S_j \times \mathbf{o}_k^j \longrightarrow \mathbf{o}_k^j$ die Permutationsoperation auf den j Faktoren, dann kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 o_j \times \mathfrak{S}_j \times \prod_{i=1}^j o_{k_i} & \xrightarrow{\rho \times id} & o_j \times \prod_{i=1}^j o_{k_i} \\
 \swarrow id \times id \times \tau^{-1} & & \searrow \gamma \\
 o_j \times \mathfrak{S}_j \times o_k^j & & o_k \\
 \downarrow \gamma & & \nearrow \rho \\
 o_k \times \mathfrak{S}_j & \xrightarrow{bl} & o_k \times \mathfrak{S}_k
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc}
 o_j \times \prod_{i=1}^j o_{k_i} \times \prod_{i=1}^j \mathfrak{S}_{k_i} & \xrightarrow{\gamma \times id} & o_k \times \prod_{i=1}^j \mathfrak{S}_{k_i} \\
 \downarrow \text{shuffle} & & \searrow \\
 o_j \times \prod_{i=1}^j (o_{k_i} \times \mathfrak{S}_{k_i}) & & o_k \times \mathfrak{S}_k \\
 \downarrow id \times \rho^j & & \nearrow \rho \\
 o_j \times \prod_{i=1}^j o_{k_i} & \xrightarrow{\gamma} & o_k.
 \end{array}$$

2. einen *Identitätspunkt* $\mathbf{1} \in o_1(0)$, so dass

$$\gamma(1; d) = d \quad \text{für alle } d \in o_j$$

und

$$\gamma(c; 1, \dots, 1) = c \quad \text{für alle } c \in o_k.$$

(Dabei habe ich $\mathbf{1}$ mit allen Degenerationen in $o_1(j)$, $j > 0$, identifiziert.)

Die **Endomorphismenoperade** einer simplizialen Menge X besteht aus den simplizialen Funktionsräumen $\text{End}_k(X) := \text{map}_*(X^k, X)$ (Potenzen bedeuten iterierte Smash-Produkte) mit der offensichtlichen \mathfrak{S}_k -Operation und den offensichtlichen Kompositionsmorphismen. Dies ist keine E_∞ -Operade (d.h. $\text{End}_j(X)$ muss weder zusammenhängend noch \mathfrak{S}_k -frei sein). Eine E_∞ -Operadenoperation von \mathbf{o} auf X ist ein Morphismus von Operaden (definiert wie man es vermuten würde) $\mathbf{o} \rightarrow \text{End}(X)$, und X heißt dann E_∞ -Raum.

Die Räume \mathbf{o}_n einer Operade sollten am besten als Parameterräume für Operationen $X^n \rightarrow X$ betrachtet werden. Operiert eine E_∞ -Operade \mathbf{o} auf X durch ρ , so hat X automatisch eine gewisse Struktur:

1. Für jedes 0-Simplex $x \in o_2(0)$ ist $\rho(x)$ eine H -Raumstruktur für X , und da o_2 zusammenhängt, sind alle diese Strukturen zueinander homotop;
2. X ist homotopeassoziativ, denn o_3 ist zusammenhängend;
3. X ist homotopiekommutativ, denn die Operation von \mathfrak{S}_2 auf o_2 ist homotop zur Identität (wiederum weil $o - 2$ zusammenhängt).
4. es gibt auch höhere Kohärenzabbildungen.

E_∞ -Operaden operieren auf unendlichen Schleifenräumen. Um dies einzusehen, konstruiert man die *kleine Würfeloperade* [May72, Ada78]. Auf der anderen Seite ist ein E_∞ -Raum „nahezu“ ein Schleifenraum: ein Schleifenraum ist immer ein gruppenartiger H -Raum (d.h. es gibt Inverse bis auf Homotopie), aber ein E_∞ -Raum muss das nicht sein. Der Zusammenhang ist jedoch so einfach, wie er nur sein könnte:

SATZ C.0.2. *Sei X ein E_∞ -Raum. Ist X gruppenartig (äquivalent, π_0 eine Gruppe), dann ist X homotopieäquivalent zu einem unendlichen Schleifenraum.*

Im Allgemeinen gibt es einen unendlichen Schleifenraum ΩBX , genannt „Gruppenvervollständigung“ von X , und eine simpliziale Abbildung von E_∞ -Räumen $X \rightarrow \Omega BX$, die eine Homotopiedäquivalenz ist, falls X zusammenhängend ist.

Man sagt oft, dass X ein unendlicher Schleifenraum *ist*, falls X den (schwachen) Homotopietyp eines solchen hat.

Wie interpretiert man die Gruppenvervollständigung eines E_∞ -Raums? Für abelsche simpliziale Monoide zum Beispiel hat diese Frage eine sehr einfache Antwort: ΩBX stimmt in der Tat mit dem Schleifenraum auf dem klassifizierenden Raum von X überein, der weiter oben mit der gleichen Notation definiert wurde. $\pi_0(X)$ ist ein abelsches Monoid, und $\mathfrak{G}(\pi_0 X) \cong \pi_0(\Omega BX)$, wobei \mathfrak{G} die Grothendieck-Gruppe oder Gruppenvervollständigung bezeichnet. Außerdem ist $\pi_0 X$ eine multiplikative Teilmenge des Pontrjagin-Rings $H_*(X)$, und es gilt:

$$H_*(\Omega BX) \cong (\pi_0 X)^{-1} H_*(X), \quad \text{die Lokalisierung an } \pi_0 X.$$

Dieses Resultat ist als der Gruppenvervollständigungssatz bekannt. In der topologischen Kategorie wurde er von McDuff und Segal mit Hilfe von Homologiefaserungen bewiesen [MS76], auch wenn er wohl schon längere Zeit vorher bekannt war, z.B. in [Seg74]. In der simplizialen Kategorie ist ein Beweis in [Jar89] angegeben.

BEMERKUNG C.0.3. Die Annahme, dass X abelsch ist, ist viel zu stark — mit Hilfe von Lokalisierung nichtkommutativer Ringe genügt es zu fordern,

dass $\pi_0 X$ im Zentrum von $H_*(X)$ liegt, oder durch „Rechtsbrüche“ konstruiert werden kann [GZ67].

Wir beweisen nun Satz C.0.1 in der folgenden Form:

PROPOSITION C.0.4. *Sei C eine symmetrisch-monoidale Kategorie. Dann erlaubt der Nerv $\mathcal{N}C$ eine E_∞ -Operadenoperation, und seine Gruppenvervollständigung ist daher ein unendlicher Schleifenraum. Hat C ein schwaches initiales oder finales Objekt, oder ist allgemeiner C zusammenhängend, dann ist $\mathcal{N}C$ selbst ein unendlicher Schleifenraum.*

Beweis: Definiere Räume $\mathbf{o}_n := \mathcal{N}(\mathcal{E}\mathfrak{S}_n)$ (vgl. A.1.8). Dies sind zusammenziehbare Räume mit einer freien \mathfrak{S}_n -Operation: \mathfrak{S}_n operiert simplizial auf einem Nerv durch objektweise Multiplikation von rechts, und \mathbf{o}_n ist zusammenhängend und -ziehbar, weil jedes Element initial und final in $\mathcal{E}\mathfrak{S}_n$ ist. Daher ist \mathbf{o} eine E_∞ -Operade, die auf $\mathcal{N}C$ operiert:

$$\mathcal{N}\phi_j: \mathbf{o}_j \times (\mathcal{N}C)^j \longrightarrow \mathcal{N}C$$

Diese Operation ist induziert von dem Funktor

$$\phi_j: \mathcal{E}\mathfrak{S}_n \times C^j \longrightarrow C,$$

der auf den Objekten für $\sigma \in \mathfrak{S}_j, X_1, \dots, X_j \in C_0$ definiert ist durch

$$\phi_j(\mathcal{E}\sigma, X_1, \dots, X_j) := X_{\sigma^{-1}(1)} \square \dots \square X_{\sigma^{-1}(j)}$$

und auf den Morphismen für $\lambda \in \mathcal{E}\mathfrak{S}_j(\sigma, \tau)$ (davon gibt es nur einen einzigen), $f_1, \dots, f_j \in C'$ durch

$$\phi_j(\lambda, f_1, \dots, f_j) := c_\lambda \circ (f_{\sigma^{-1}(1)} \square \dots \square f_{\sigma^{-1}(j)}),$$

wobei c_λ ($\lambda = \tau\sigma^{-1}$) die Symmetrieabbildung

$$c_\lambda: X_1 \square \dots \square X_j \xrightarrow{\cong} X_{\lambda(1)} \square \dots \square X_{\lambda(j)}$$

ist.

Die Überprüfung, dass dies tatsächlich eine Operadenoperation definiert, ist einfach. Satz C.0.2 impliziert daher, dass $\Omega B(\mathcal{N}C)$ ein unendlicher Schleifenraum ist.

Der zweite Teil des Satzes folgt aus der Beobachtung, dass $\mathcal{N}C$ zusammenhängend und daher gruppenartig ist, falls C eine schwach initiales oder finales Objekt hat. \square

Literaturverzeichnis

- [Ada78] ADAMS, J. FRANK: *Infinite loop spaces*. Annals of Mathematical Studies 90. Princeton University Press, 1978.
- [Ati71] ATIYAH, MICHAEL F: *Riemann surfaces and spin structures*. Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 4:47 à 62, 1971.
- [Bau97] BAUER, TILMAN: *Mapping class groups of spin surfaces and their homology*. MSc Thesis, University of Oxford, 1997.
- [Bir71] BIRMAN, JOAN: *On Siegel's Modular Group*. Math. Ann., 191:59–68, 1971.
- [Deh38] DEHN, M.: *Die Gruppe der Abbildungsklassen*. Acta Math., 69:135–206, 1938.
- [EE67] EARLE, C J und J EELLS: *The diffeomorphism group of a compact Riemann surface*. Bulletin of the American Mathematical Society, 73:557–559, 1967.
- [Eps66] EPSTEIN, D. B. A.: *Curves on 2-Manifolds and Isotopies*. Acta Math., 115:83–107, 1966.
- [Gra73] GRAMAIN, ANDRÉ: *Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte*. Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 6:53 à 66, 1973.
- [GZ67] GABRIEL, PETER und MICHEL ZISMAN: *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 35. Springer-Verlag, 1967.
- [Har85] HARER, J.: *Stability of the Homology of the mapping class groups of orientable surfaces*. Ann. Math., 121:215–249, 1985.
- [Har90] HARER, J.: *Stability of the Homology of Moduli Spaces of Riemann surfaces with Spin Structure*. Math. Ann., 287:323–334, 1990.
- [Hir76] HIRSCH, MORRIS W.: *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics 33. Springer-Verlag, 1976.
- [HT80] HATCHER, A. und W. THURSTON: *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*. Topology, 100:221–237, 1980.
- [Jar89] JARDINE, J. F.: *The Homotopical Foundations of Algebraic K-Theory*, Seiten 57–82. Contemporary Mathematics 83. AMS, 1989.
- [Jar98] JARDINE, J. F.: *Simplicial Homotopy Theory*. Unveröffentlichtes elektronisches Buchmanuskript
erhältlich auf <http://www.math.uwo.ca/~jardine/papers/simp-sets>, 1998.
- [Joh80] JOHNSON, DENNIS: *Spin Structures and Quadratic Forms on Surfaces*. Proc. of the LMS, 22:365–373, 1980.
- [Kli61] KLINGEN, H.: *Charakterisierung der Siegelschen Modulgruppe durch ein endliches System erzeugender Relationen*. Math. Ann., 144:64–82, 1961.
- [Lic64] LICKORISH, W. B. R.: *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 60:769–778, 1964.

- [Mac71] MACLANE, SAUNDERS: *Categories for the working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics 5. Springer Verlag, 1971.
- [Mas97] MASBAUM, G: *On representations of Spin mapping class groups arising in Spin TQFT*. In: *Geometry and physics (Århus, 1995)*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 184, Seiten 197–207. Dekker, New York, 1997.
- [May72] MAY, PETER: *The Geometry of Iterated Loop Spaces*. Lecture Notes in Mathematics 271. Springer Verlag, 1972.
- [McC75] MCCOOL, J.: *Some finitely generated subgroups of the automorphism group of a free group*. Journal of Algebra, 35:205–213, 1975.
- [Mil57] MILNOR, JOHN: *The geometric Realization of a semi-simplicial complex*. Ann. Math., 65 (2):357–362, 1957.
- [Mis94] MISLIN, GUIDO: *Mapping Class Groups, Characteristic Classes, and Bernoulli Numbers*. Centre de Recherches Mathématiques Proceedings and Lecture Notes, 6:103–131, 1994.
- [Moe89] MOERDIJK, IEKE: *Bisimplicial sets and the group-completion theorem*. In: JARDINE und SNAITH (Herausgeber): *Algebraic K-Theory: Connections with Geometry and Topology*, Seiten 225–240. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [MS76] McDUFF, DUSA und GRAEME SEGAL: *Homology fibrations and the “Group-Completion” theorem*. Inv. Math., 31:279–284, 1976.
- [Qui67] QUILLEN, DANIEL: *Homotopical Algebra*. Lecture Notes in Mathematics 43. Springer Verlag, 1967.
- [Qui73] QUILLEN, DANIEL: *Higher algebraic K-theory: I*. In: *Algebraic K-theory I*, Lecture Notes in Mathematics 341. Springer Verlag, 1973.
- [Seg68] SEGAL, GRAEME: *Classifying spaces and spectral sequences*. Publ. Math. Inst. des Hautes Études Scient., 34:105–112, 1968.
- [Seg74] SEGAL, GRAEME: *Categories and cohomology theories*. Topology, 13:293–312, 1974.
- [Til97a] TILLMANN, ULRIKE: *Discrete Models for the category of Riemann surfaces*. Math. Proc. Cam. Phil. Soc., 121:39–49, 1997.
- [Til97b] TILLMANN, ULRIKE: *On the homotopy of the stable mapping class group*. Inv. Mat., 130:257–275, 1997.
- [Waj83] WAJNRYB, BRONISLAW: *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*. Isr. J. Math., 45:157–174, 1983.
- [Wei94] WEIBEL, CHARLES A.: *An introduction to homological algebra*. Cambridge studies in advanced mathematics 38. Cambridge University Press, 1994.